Stabilität von Wahrscheinlichkeitsmaßen unter Operatorgruppen auf Banachräumen

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Eckhard Kehrer
aus Tübingen

1983

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543922_0059

Stabilität von Wahrscheinlichkeitsmaßen unter Operatorgruppen auf Banachräumen

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Eckhard Kehrer
aus Tübingen

1983

Tag der mündlichen Prüfung: 4. Juli 1983
Dekan: Professor Dr. A. Schönhage
1. Berichterstatter: Professor Dr. E. Siebert
2. Berichterstatter: Professor Dr. H. Heyer

REFO-DRUCK HANS VOGLER TÜBINGEN

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Bezeichnungen

I. Vorbereitungen

1. Die Lévy-Chintschin-Formel..... 2

2. Banachräume vom Typ p oder Kotyp q..... 4

3. Ein allgemeiner Grenzwertsatz..... 6

4. Operatorgruppen auf Banachräumen..... 8

II. Stabilität auf dem $\mathbb{R}^d$

1. Darstellung stabiler Maße..... 17

2. Normale Anziehungsbereiche..... 21

3. Momente..... 25

4. Der Γ-Querschnitt (L,ϕ)..... 27

III. Stabile Maße auf separablen Banachräumen

1. Die Fourier-Transformierte Γ-stabiler Maße..... 36

2. Der Index Γ-stabiler Maße..... 42

3. Der normale Anziehungsbereich Γ-stabiler Maße.... 49

4. Der normale Anziehungsbereich
Γ-stabiler Gauß-Maße..... 65

5. Momente..... 73

Literaturverzeichnis..... 78

Einleitung

Im Jahre 1937 führte P. Lévy den Begriff des stabilen Maßes auf der reellen Geraden ein. Die stabilen Verteilungen treten als Grenzwerte von normierten Summen unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariabler auf. Andererseits sind sie stabil im folgenden Sinne: Die Menge der Bildmaße einer stabilen Verteilung unter der positiven Automorphismengruppe der reellen Geraden enthält mit je zwei Elementen auch ein Translat ihrer Faltung.

Aus diesen beiden Betrachtungsweisen ergeben sich zwei verschiedene Möglichkeiten, stabile Verteilungen auf Vektorräumen zu definieren.

Zunächst wurde die Grenzwertversion auf endlich-dimensionale Räume übertragen. Anfänglich ließ man für die Normierung der approximierenden Summen nur positive Skalare zu. Von dieser Einschränkung löste sich M. Sharpe [27] im Jahre 1969. Er betrachtete Grenzwerte von durch Automorphismen normierten Summen unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvektoren und prägte den Begriff des operator-stabilen Maßes. Hierauf folgten Untersuchungen von W.N. Hudson, Z.J. Jurek und J.D. Mason. Diese Autoren befaßten sich hauptsächlich mit der Lévy-Chintschin-Formel, den Anziehungsbereichen sowie den Momenten von operator-stabilen Verteilungen.

Auf der anderen Seite führten K.R. Parthasarathy und K. Schmidt 1975 den Begriff des bezüglich einer Gruppe von Automorphismen stabilen Maßes auf einem endlich-dimensionalen

Raum ein.

Das Bindeglied zwischen diesen beiden Begriffsbildungen stellen die Einparameter-Gruppen von Automorphismen dar. Denn die bezüglich einer Einparameter-Gruppe stabilen Maße sind operator-stabil; umgekehrt sind die operator-stabilen Verteilungen stets stabil bezüglich einer geeigneten Einparameter-Gruppe.

Im Zusammenhang mit der stürmischen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf unendlich-dimensionalen Räumen stellte sich auch hier bald die Frage nach den stabilen Verteilungen.

Zunächst wurden nur Spezialfälle behandelt. In diesem Zusammenhang sind zuerst die Verteilungen zu nennen, die bezüglich der Gruppe der positiven Homothetien stabil sind. Sie treten als Grenzwerte von durch positive Skalare normierten Summen unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvektoren auf. Diese Theorie, deren Entwicklung schon 1970 begann, besitzt als ihre natürliche Domäne die lokalkonvexen topologischen Vektorräume. Wichtige Beiträge hierzu lieferten unter anderem A. de Acosta, E. Dettweiler, E. Giné und B.S. Rajput.

Andererseits führte W. Krakowiak [19] im Jahre 1979 operator-stabile Maße auf separablen Banachräumen ein. Er vollzog, wie M. Sharpe im endlich-dimensionalen Fall, den Übergang von der Skalarnormierung zur Operatornormierung, stellte jedoch an die normierenden Operatoren sehr einschränkende Forderungen. Er erhielt auf diese Weise die

Klasse der bezüglich normstetigen Einparameter-Gruppen von Operatoren stabilen Verteilungen.

Diese beiden Spezialfälle sind jedoch methodisch so ausgerichtet, daß zum endlich-dimensionalen Fall analoge Schlußweisen angewandt werden können.

Erst im Jahre 1981 betrachtete Z.J. Jurek [17] Maße auf separablen Banachräumen, die bezüglich einer stark-stetigen Operatorgruppe Γ stabil sind. Wir sprechen fortan von Γ-stabilen Maßen. Z.J. Jurek bewies, daß genau die Γ-stabilen Maße als Grenzwerte von durch Operatoren normierten Summen unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvektoren auftreten. Die normierenden Operatoren sind dabei Elemente von Γ.

Diese Charakterisierung war der Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit. Ihr Ziel ist die Entwicklung der Theorie der Γ-stabilen Maße auf separablen Banachräumen. Zu den Schwerpunktbereichen Lévy-Chintschin-Formel, normale Anziehungsbereiche sowie Momente sollen am endlich-dimensionalen Fall orientierte Resultate bewiesen werden. Es zeigt sich jedoch sehr schnell, daß von den Methoden, die für endlich-dimensionale Räume Anwendung finden, Abstand genommen werden muß. Der Hauptgrund hierfür liegt in der Vielfalt der zugelassenen Operatorgruppen. Den eigentlichen stabilitätstheoretischen Betrachtungen geht daher ein Abschnitt über stark-stetige Operatorgruppen auf Banachräumen voraus, in dem wir einige für die Stabilität relevante Eigenschaften beweisen. Diesen Abschnitt haben wir in Kapitel I aufgenommen.

Wir geben nun eine kurze inhaltliche Übersicht:

Kapitel I hat vorbereitenden Charakter. Wir stellen die später benötigten Hilfsmittel bereit, so die Lévy-Chintschin-Formel für unendlich teilbare Maße auf separablen Banachräumen, einige Aussagen über Räume vom Typ p oder Kotyp q sowie einen Grenzwertsatz für Dreieckssysteme von Zufallsvektoren. Wie schon angedeutet beschäftigen wir uns am Ende dieses Kapitels ausführlich mit Operatorgruppen auf Banachräumen.

In Kapitel II befassen wir uns mit stabilen Maßen auf endlich-dimensionalen Räumen. Zunächst werden hierzu einige Resultate von W.N. Hudson, Z.J. Jurek und J.D. Mason bereitgestellt. Durch neue Ergebnisse über normale Anziehungsbereiche und Momente von stabilen Verteilungen werden die bisherigen Kenntnisse erweitert und abgerundet. Zusätzliche Einsicht vermittelt schließlich die Behandlung eines konkreten Beispiels im zwei-dimensionalen Fall.

Das zentrale Kapitel III ist der Ausdehnung der in Kapitel II erhaltenen Ergebnisse auf separable Banachräume gewidmet. Es zeigt sich, daß sich die Darstellung der Fourier-Transformierten sowie die Untersuchung der Momente stabiler Maße in völliger Analogie zum endlich-dimensionalen Fall durchführen läßt. Bei der Behandlung normaler Anziehungsbereiche, die den größten Raum einnimmt, muß man dagegen einige Abstriche machen. Zum Beispiel erfordert eine sinnvolle Charakterisierung des normalen Anziehungsbereichs Γ-stabiler Poisson-Maße die Beschränkung auf Banachräume

vom Typ p.

Um den Bezug zu den endlich-dimensionalen Räumen und zu den oben erwähnten Spezialfällen nicht zu verlieren, werden stets Spezialisierungen - etwa auf Hilberträume - vorgenommen oder aber Operatorgruppen mit einschränkenden Eigenschaften betrachtet.

Die Anregung zu dieser Arbeit stammt von Herrn Prof. Dr. E. Siebert, der mir auch in zahlreichen Gesprächen stets mit Rat und Kritik wesentlich half. Dafür möchte ich ihm an dieser Stelle sehr herzlich danken.

Tübingen, im April 1983

Bezeichnungen

ALLGEMEINES: $\mathbb{R}_+$ bezeichne die Menge der positiven reellen Zahlen.

Seien X eine Menge und $A \subset X$. Dann sei A^c das Komplement von A, und 1_A bezeichne die Indikatorfunktion von A. Ist f eine Abbildung von X in eine Menge Y und $B \subset X$, so wird mit $f|_B$ die Einschränkung von f auf B bezeichnet.

Für eine Teilmenge C eines topologischen Raumes sei ∂C stets der topologische Rand von C.

TOPOLOGISCHE VEKTORRÄUME: Soweit nichts anderes vereinbart wird, schließen wir uns den Bezeichnungen und Definitionen von [25] an.

Es sei E stets ein separabler Banachraum über dem Skalarkörper $\mathbb{R}$. Es seien $U_\varepsilon := \{x \in E: |x| < \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ und $U := U_1$. Für einen Teilraum F von E ist die Abstandsfunktion $d(\cdot,F)$ definiert durch $d(x,F) := \inf\{|x - y|: y \in F\}$ $(x \in E)$. Ist $A \subset E$, so bezeichnet $\langle A \rangle$ den von A erzeugten linearen Teilraum in E.

E^* bzw. E' sei der algebraische bzw. topologische Dual von E. Wir betrachten ausschließlich das Dualsystem $\langle E,E' \rangle$. Für $A \subset E$ heißt $A^\circ := \{x' \in E': |\langle x,x' \rangle| \leq 1 \text{ für alle } x \in A\}$ die Polare von A.

Die Adjungierte einer stetigen linearen Abbildung T bezeichnen wir stets mit T'.

SPEKTRALTHEORIE: Sei T ein stetiger linearer Operator auf

dem reellen Banachraum E. Für spektraltheoretische Überlegungen identifizieren wir T stets mit seiner komplexen Fortsetzung auf die Komplexifizierung von E (vgl. [25], I.7 und Appendix 1).

Es bezeichne $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}: (\lambda I - T)^{-1}$ existiert nicht$\}$ das Spektrum von T. $P\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}: \lambda I - T$ nicht injektiv$\}$ sei das Punktspektrum, $R\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}: \overline{(\lambda I - T)(E)} \neq E\}$ das Residualspektrum von T.

Die Zahlen $r(T) := \sup\{|\lambda|: \lambda \in \sigma(T)\}$, $s^+(T) := \sup\{\mathrm{Re}\ \lambda: \lambda \in \sigma(T)\}$ sowie $s^-(T) := \inf\{\mathrm{Re}\ \lambda: \lambda \in \sigma(T)\}$ bezeichnen den Spektralradius sowie die obere bzw. untere Spektralschranke von T.

MASSTHEORIE: Die nicht ausdrücklich aufgeführten Definitionen und Bezeichnungen können [4] entnommen werden.

Sei E ein reeller separabler Banachraum. Es bezeichne $\mathfrak{B}(E)$ die σ-Algebra der Borelschen Teilmengen von E. Wir betrachten ausschließlich positive Maße auf $(E,\mathfrak{B}(E))$. $\mathcal{M}^1(E)$ sei die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(E,\mathfrak{B}(E))$, versehen mit der schwachen Topologie.

E-wertige Zufallsvektoren X seien stets auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ definiert. Mit $\mathbf{E}(X)$ werde deren Erwartungswert bezeichnet.

Für $x \in E$ bezeichne ε_x die Einheitsmasse in x. Ein Maß $\mu \in \mathcal{M}^1(E)$ heißt entartet, wenn es ein x in E gibt mit $\mu = \varepsilon_x$. Für $\mu, \nu \in \mathcal{M}^1(E)$ bezeichnen $\mu * \nu$ das Faltungsprodukt von μ mit ν und μ^n das n-fache Faltungsprodukt von μ mit sich selbst. $S(\mu)$ sei der Träger des Maßes μ.

I. Vorbereitungen

Es bezeichne E stets einen separablen Banachraum über R.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die grundlegenden Begriffe und Sätze für die weiteren Abschnitte bereitzustellen. Dabei verzichten wir, soweit es sich um bekannte Resultate handelt, auf Beweise und verweisen auf die entsprechende Literatur.

Bevor wir in §1 die Lévy-Chintschin-Formel für die Fourier-Transformierte unendlich teilbarer Wahrscheinlichkeitsmaße auf E angeben, führen wir die Begriffe "Lévy-Maß" und "verallgemeinertes Poisson-Maß" ein. Im Mittelpunkt von §2 stehen zwei spezielle Klassen von Banachräumen, zum einen die vom Typ p, zum anderen die vom Kotyp q. Lévy-Maße auf diesen Räumen besitzen spezielle Integrabilitätseigenschaften die wir besonders hervorheben wollen. In §3 zitieren wir dann einen Grenzwertsatz für infinitesimale Dreiecksfamilien von zeilenweise unabhängigen, identisch verteilten, E-wertigen Zufallsvektoren. Schließlich erinnern wir in §4 an einige spektraltheoretische Eigenschaften von Generatoren starkstetiger Einparametergruppen Γ von Operatoren auf E. In diesem Zusammenhang führen wir den Begriff des "Γ-Querschnitts" ein. Mit dem Beweis einiger speziell auf die später auftretende Situation zugeschnittenen Resultaten über solche Operatorgruppen beenden wir dieses Kapitel.

1. Die Lévy-Chintschin-Formel

Wir folgen dem von A. Araujo und E. Giné in [4] gewählten Zugang und geben folgende

1.1 Definition

Ein σ-endliches Maß M auf $(E,\mathcal{B}(E))$ heißt Lévy-Maß, falls ein Maß $\tilde{e}(M) \in \mathcal{M}^1(E)$ existiert mit

$$\tilde{e}(M)\hat{}(x') = \exp\left[\int (e^{i<x',x>} - 1 - i<x',x>1_U(x))M(dx)\right]$$

für jedes $x' \in E'$.

$\tilde{e}(M)$ heißt dann (verallgemeinertes) Poisson-Maß und M (verallgemeinerter) Poisson-Exponent von $\tilde{e}(M)$.

1.2 Bemerkungen

(1) Jedes endliche Maß M auf $(E,\mathcal{B}(E))$ ist ein Lévy-Maß, denn das in der üblichen Weise durch die Exponentialreihe definierte Poisson-Maß $e(M-M(E)\varepsilon_0)$ erfüllt die Bedingung in 1.1.

(2) Während sich Lévy-Maße auf Hilberträumen dadurch charakterisieren lassen, daß sie die Funktion $\min(1,\|\cdot\|^2)$ integrieren, ist dies in allgemeinen Banachräumen nicht möglich.

(3) Für die Approximierbarkeit von Lévy-Maßen durch endliche Maße gilt jedoch: Ein Maß M auf $(E,\mathcal{B}(E))$ ist genau dann ein Lévy-Maß, wenn für jede gegen M aufsteigende Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ endlicher Maße auf $(E,\mathcal{B}(E))$ die Folge $(e(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\tilde{e}(M)$ konvergiert ([4], Theorem 3.4.7).

Wir fassen nun einige Eigenschaften von Gauß-Maßen zusammen

1.3

Ein symmetrisches Maß $\rho \in \mathcal{M}^1(E)$ heißt Gauß-Maß, falls alle eindimensionalen Randverteilungen $x'(\rho)$ $(x' \in E')$ Normalverteilungen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sind.

Der durch $\langle Rx', y' \rangle := \int \langle x', x \rangle \langle y', x \rangle \rho(dx)$ $(x', y' \in E')$ definierte Operator R von E' in E heißt Kovarianz-Operator von ρ. Dieser ist kompakt, symmetrisch und positiv semidefinit.

Die Fourier-Transformierte eines Gauß-Maßes $\rho \in \mathcal{M}^1(E)$ mit Kovarianz-Operator R besitzt die Gestalt

$$\hat{\rho}(x') = \exp\left[-\frac{1}{2} \langle Rx', x' \rangle \right] \qquad (x' \in E').$$

Nach diesen Vorbemerkungen können wir nun die Lévy-Chintschin-Formel für unendlich teilbare Maße angeben. Einen Beweis findet man zum Beispiel in [4].

1.4

Ein Maß $\mu \in \mathcal{M}^1(E)$ ist genau dann unendlich teilbar, wenn es ein $x_o \in E$, ein Gauß-Maß $\rho \in \mathcal{M}^1(E)$ sowie ein Lévy-Maß M auf $(E, \mathcal{B}(E))$ mit $M(\{0\}) = 0$ gibt, so daß gilt

$$\mu = \varepsilon_{x_o} * \rho * \tilde{e}(M).$$

Die Größen x_o, ρ, M sind eindeutig durch μ bestimmt. Die Fourier-Transformierte von μ hat die Gestalt

$$\hat{\mu}(x') = \exp\Big[\, i\langle x', x_0\rangle - \frac{1}{2}\langle Rx', x'\rangle + \int (e^{i\langle x', x\rangle} - 1 - i\langle x', x\rangle 1_U(x))M(dx)\Big] \quad (x' \in E').$$

Dabei ist R der Kovarianz-Operator von ρ.

2. Banachräume vom Typ p oder Kotyp q

In diesem Paragraphen führen wir zwei spezielle Klassen von Banachräumen ein, um Integrabilitätsbedingungen für Lévy-Maße zu erhalten.

2.1 Definition

Ein separabler Banachraum E heißt vom Typ p (bzw. Kotyp q), falls eine Konstante c (bzw. d) existiert, so daß für jede endliche Folge $X_1, \ldots, X_n$ unabhängiger, zentrierter, p- (bzw. q-) integrierbarer ($p, q \in \mathbb{R}_+$), E-wertiger Zufallsvektoren gilt:

$$\mathbb{E}\Big(\Big\| \sum_{i=1}^{n} X_i \Big\|^p\Big) \leq c \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\|X_i\|^p)$$

bzw.

$$\mathbb{E}\Big(\Big\| \sum_{i=1}^{n} X_i \Big\|^q\Big) \geq d \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\|X_i\|^q) .$$

2.2 Bemerkungen

(1) Für $E \neq \{0\}$ folgt $p \in [1,2]$, $q \geq 2$.

(2) Jeder separable Banachraum ist vom Typ 1.

(3) Für einen σ-endlichen Maßraum $(X,\mathcal{A},\mu)$ ist $L^p(\mu)$ vom Typ $\min(p,2)$ und vom Kotyp $\max(p,2)$.

(4) S. Kwapień bewies in [22], daß E genau dann zugleich vom Typ 2 und vom Kotyp 2 ist, wenn E zu einem Hilbertraum isomorph ist.

(5) Mit E ist auch jeder Quotient nach einem abgeschlossenen Teilraum von E vom Typ p. Für jeden dieser Quotienten kann in 2.1 dieselbe Konstante c gewählt werden.

Doch nun zu den angekündigten Integrabilitätsbedingungen.

2.3

(i) E ist genau dann vom Typ p, wenn jedes σ-endliche Maß auf $(E,\mathcal{B}(E))$, das die Funktion $\min(1,|\cdot|^p)$ integriert, ein Lévy-Maß ist ([4], Theorem 3.7.6).

(ii) Mit 2.2(2) erhalten wir aus (i), daß jedes σ-endliche Maß auf $(E,\mathcal{B}(E))$, das die Funktion $\min(1,\|\cdot\|)$ integriert, ein Lévy-Maß ist.

(iii) Ist E vom Kotyp q, so integriert jedes Lévy-Maß die Funktion $\min(1,\|\cdot\|^q)$. Für $q = 2$ gilt hiervon auch die Umkehrung ([1], Theorem 2.2).

3. Ein allgemeiner Grenzwertsatz

Es sei $(X_{nj})_{j=1,\ldots,n;n\in\mathbb{N}}$ ein Dreieckssystem von zeilenweise unabhängigen und identisch verteilten E-wertigen Zufallsvektoren. Das System sei zudem infinitesimal, das heißt $\lim_{n\to\infty} P([\|X_{n1}\| \geq \varepsilon]) = 0$ für jedes $\varepsilon > 0$. Weiterhin bezeichnen S_n bzw. $S_{n,\delta}$ $(\delta > 0)$ die durch $S_n := X_{n1} + \ldots + X_{nn}$ bzw. $S_{n,\delta} := 1_{[\|X_{n1}\| \leq \delta]} X_{n1} + \ldots + 1_{[\|X_{nn}\| \leq \delta]} X_{nn}$ definierten Zufallsvektoren $(n \in \mathbb{N})$.

Für diese speziellen Systeme lautet der in [4] bewiesene Grenzwertsatz folgendermaßen

3.1

Es existiert genau dann eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E, so daß die Folge $(S_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung konvergiert, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind

(i) Es existiert ein σ-endliches Maß M auf $(E,\mathcal{B}(E))$ mit $M(\{0\}) = 0$ und der Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} n[P_{X_{n1}}|_{U_\delta^c}] = M|_{U_\delta^c} \quad \text{für jedes } \delta > 0 \text{ mit } M(\partial U_\delta) = 0.$$

(ii) Es existiert

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \overline{\lim_{n}}\; n\left[\int_{U_\varepsilon} \langle x', x\rangle^2 P_{X_{n1}}(dx) - \left(\int_{U_\varepsilon} \langle x', x\rangle P_{X_{n1}}(dx)\right)^2\right]$$

$=: \phi(x')$ für alle $x' \in E'$, und $\phi(x')$ ist endlich auf einer $\sigma(E',E)$-totalen Teilmenge F' von E'.

Das gleiche gilt mit "$\underline{\lim}_{n}$" anstelle von "$\overline{\lim}_{n}$".

(iii) Es existieren eine aufsteigende Folge $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ endlich-dimensionaler Teilräume E_k mit $\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k} = E$ sowie δ_o, $p > 0$ derart, daß

$$\limsup_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{U_{\delta_o}} d(x - \int_{U_{\delta_o}} x P_{S_n}(dx), E_k)^p \, P_{S_n}(dx) = 0.$$

In diesem Fall gilt:

(1) M ist ein Lévy-Maß, und es existiert ein Gauß-Maß ρ auf $(E,\mathcal{B}(E))$ mit $\phi(x') = \int \langle x',x\rangle^2 \, \rho(dx)$ für alle $x' \in F'$.

(2) Zu jedem $\delta > 0$ mit $M(\partial U_\delta) = 0$ existiert ein $z_\delta \in E$, so daß

$$\lim_{n\to\infty} P_{S_n - \mathbb{E}(S_{n,\delta})} = \varepsilon_{z_\delta} * \rho * \tilde{e}(M).$$

(3) Für dieselben $\delta > 0$ folgt aus der Konvergenz der Folge $(P_{S_n - y_n})_{n\in\mathbb{N}}$ die Konvergenz der Folge $(\mathbb{E}(S_{n,\delta}) - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E.

Um ein Kriterium für die relative Kompaktheit einer normbeschränkten Folge von Maßen auf E zu haben, verallgemeinern wir Theorem 1.4.5 aus [4].

3.2 Satz

Es sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine normbeschränkte Folge von Maßen auf $(E,\mathcal{B}(E))$. Diese genüge den folgenden Bedingungen:

(i) Zu $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ existiert ein endlich-dimensionaler Teilraum F von E, so daß

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(\{x \in E: d(x,F) > \varepsilon\}) < \varepsilon'.$$

(ii) Es existiert eine $\sigma(E',E)$-totale Teilmenge F' von E', so daß für alle $x' \in F'$ die Folge $(x'(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig straff ist.

Dann ist die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relativ kompakt.

Beweis: Nach dem Satz von Prohoroff genügt es, die gleichmäßige Straffheit von $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu zeigen.

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir eine Teilfolge $(\mu_n^{(\varepsilon)})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß $\inf_{n\in\mathbb{N}} \mu_n^{(\varepsilon)}(E) \geq \varepsilon$. Anderenfalls würde sich aus $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$ die Behauptung ergeben. Wir betrachten nun die normierte Folge $(\mu_n^{(\varepsilon)}/\mu_n^{(\varepsilon)}(E))_{n\in\mathbb{N}}$. Für diese ergeben sich aus (i) und (ii) die Bedingungen (i), (ii) von Theorem 1.4.5 in [4]. Also ist sie gleichmäßig straff.

Die Normbeschränktheit von $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ impliziert nun die gleichmäßige Straffheit der Teilfolge $(\mu_n^{(\varepsilon)})_{n\in\mathbb{N}}$. Daraus ergibt sich nun die Behauptung.

4. Operatorgruppen auf Banachräumen

Es sei $\Gamma := (T_t)_{t>0}$ eine stark-stetige Gruppe von Operatoren auf dem separablen Banachraum E. Es gilt also $T_{st} = T_s \circ T_t$ für alle $s,t > 0$. Außerdem ist die Abbildung $t \mapsto T_t$ von $\mathbb{R}_+$ in $\mathcal{L}(E)$ stetig bezüglich der starken Operator-Topologie auf $\mathcal{L}(E)$.

Zusätzlich gelte für jedes $x \in E \setminus \{0\}$ $\lim_{t\to 0} \|T_t x\| = 0$ sowie $\|T_t x\| \longrightarrow \infty$ $(t \longrightarrow \infty)$.

Weiterhin bezeichne (A,D(A)) den Generator von Γ. Dieser ist ein linearer, abgeschlossener, dicht definierter Operator von D(A) in E. Für $x \in D(A)$ gilt $Ax = \lim_{t\to 1}[(T_t x - x)/(t-1)]$.

Beachtet man, daß sich Γ aus den Halbgruppen $(T_t)_{t\geq 1}$ und $(T_{1/t})_{t\geq 1}$ zusammensetzt, so erhält man für Γ folgende Eigenschaften. Für die entsprechenden Beweise sei auf [5] verwiesen.

4.1

Es existieren $$\lim_{t\to\infty} \frac{\log \|T_t\|}{\log t} = \inf_{t>1} \frac{\log \|T_t\|}{\log t} =: \omega_o^+$$

sowie $$\lim_{t\to o} \frac{\log \|T_t\|}{\log t} = \sup_{t<1} \frac{\log \|T_t\|}{\log t} =: \omega_o^-$$

und es gilt:

(i) $0 \leq \omega_o^- \leq \omega_o^+$, $\{\mathrm{Re}\ \lambda : \lambda \in \sigma(A)\} \subset [\omega_o^-, \omega_o^+]$.

(ii) $\forall \omega > \omega_o^+\ \exists M_\omega > 0\ \forall t \geq 1$: $\|T_t\| \leq M_\omega t^\omega$,

$\forall \omega' < \omega_o^-\ \exists M_{\omega'} > 0\ \forall t \in (0,1)$: $\|T_t\| \leq M_{\omega'} t^{\omega'}$.

(iii) $$r(T_t) = \begin{cases} t^{\omega_o^+} & , \text{falls } t > 1 \\ t^{\omega_o^-} & , \text{falls } t \in (0,1). \end{cases}$$

(iv) $\omega_o^- > 0 \iff \lim_{t\to o} \|T_t\| = 0$.

(v) Für normstetige Gruppen Γ ist der Generator A ein beschränkter Operator, also D(A) = E. In diesem Fall hat man $T_t = t^A := e^{(\log t)A}$ $(t>0)$.

Aus dem spektralen Abbildungssatz folgt dann $s^+(A) = \omega_o^+$ und $s^-(A) = \omega_o^-$.

(vi) Für jedes $t > 0$ gilt die folgende Abschätzung

$$\|T_t x\| \geq \frac{\|x\|}{\|T_{1/t}\|} \qquad (x \in E).$$

(vii) Während für nicht normstetige Gruppen im allgemeinen nur die Inklusion $t^{\sigma(A)} \subset \sigma(T_t)$ $(t>0)$ gültig ist, hat man für die Punktspektren $P\sigma(T_t) = t^{P\sigma(A)}$ $(t>0)$.

Bei der Untersuchung des Lévy-Maßes eines stabilen Maßes taucht folgendes Problem auf: Gibt es eine Teilmenge Q von E, so daß sich jeder Punkt $z \in E \setminus \{0\}$ eindeutig in der Form $z = T_t x$ $(x \in Q,\ t>0)$ darstellen läßt? Mit anderen Worten besitzt jeder Punkt $z \in E \setminus \{0\}$ eine "Polardarstellung" bezüglich Γ?

Bevor wir eine Antwort geben, führen wir folgende Sprechweise ein

4.2 Definition

Das Paar (Q,χ) heißt ein Querschnitt für die Gruppe Γ (Γ-Querschnitt) mit Schranken $q_1, q_2 \in \mathbb{R}_+$, falls gilt

(i) Q ist eine Borelsche Teilmenge in E.

(ii) Es ist $q_1 = \inf\{\|x\|: x \in Q\}$ und $q_2 = \sup\{\|x\|: x \in Q\}$.

(iii) Die Abbildung $\chi: Q \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E \setminus \{0\};\ (x,t) \mapsto T_t x$ ist ein stetiger Borel-Isomorphismus.

Ist Q sogar abgeschlossen, so heißt (Q,χ) ein abgeschlossener Γ-Querschnitt mit Schranken q_1, q_2.

Im Falle $q_1 = q_2 = 1$ sprechen wir einfach von einem Querschnitt für Γ.

Für Gruppen Γ mit $\omega_o^- > 0$ kann die Abgeschlossenheit eines Γ-Querschnitts (Q,χ) mit Schranken q_1, q_2 durch die Stetigkeit der Abbildung χ^{-1} charakterisiert werden. Dies zeigt das folgende

4.3 Lemma

Es seien (Q,χ) ein Γ-Querschnitt mit Schranken q_1, q_2 sowie $\omega_o^- > 0$.

(Q,χ) ist genau dann abgeschlossen, wenn χ^{-1} stetig ist.

Beweis: Ist χ^{-1} stetig, also χ ein Homöomorphismus, so folgt wegen $Q = \chi(Q \times \{1\})$ die Abgeschlossenheit von Q.

Sei nun umgekehrt Q abgeschlossen. Wir zeigen die Folgen-Stetigkeit von χ^{-1}. Seien dazu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in Q bzw. $\mathbb{R}_+$ mit $\lim_{n\to\infty} T_{t_n} x_n = T_t x$ $(x \in Q,\ t \in \mathbb{R}_+)$.

Aus 4.1 und 4.2(ii) folgt, daß die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und daß sie Null nicht als Häufungspunkt besitzt. Also enthält sie eine konvergente Teilfolge $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Sei $t' \in \mathbb{R}_+$ deren Limes.

Nun ergibt sich

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} T_{1/t_{n_k}} (T_{t_{n_k}} x_{n_k}) = T_{t/t'} x.$$

Da Q nach Voraussetzung abgeschlossen ist, folgt $T_{t/t'} x \in Q$. Wegen der Eindeutigkeit der Polarzerlegung hat man $t = t'$.

Diese Argumentation zeigt, daß $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst gegen t konvergieren muß. Somit konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x. Also ist χ^{-1} folgen-stetig.

Kehren wir nun zu dem oben gestellten Problem zurück: Wir zeigen, daß für Γ stets ein Querschnitt existiert. Dazu greifen wir eine Idee von W.N. Hudson und J.D. Mason auf und verallgemeinern diese auf separable Banachräume. Da die einzelnen Γ-Bahnen $\{T_t x\colon t > 0\}$ $(x \in E \setminus \{0\})$ nach Voraussetzung für $t \to 0$ bzw. $t \to \infty$ gegen 0 bzw. gegen ∞ gehen, ist folgende Definition sinnvoll.

Es sei $L := \{x \in E\colon \|x\| = 1,\ \|T_t x\| > 1 \quad \forall t > 1\}$ die Menge der letzten Schnittpunkte der Γ-Bahnen mit der Einheitssphäre. Weiterhin sei Φ die durch $\Phi(x,t) := T_t x$ definierte Abbildung von $L \times \mathbb{R}_+$ nach $E \setminus \{0\}$.

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir nun

4.4 Satz

(L,Φ) ist ein Querschnitt für Γ. Insbesondere bilden die Mengen $[B;t_o] := \{T_t x\colon x \in B,\ t > t_o\}$ $(B \in \mathcal{B}(L),\ t_o \in \mathbb{R}_+)$ ein durchschnittsstabiles System, das die σ-Algebra $\mathcal{B}(E \setminus \{0\})$ erzeugt.

Beweis: Wegen
$$L = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \in [1+1/n,n]} \{x\colon \|x\| = 1,\ \|T_t x\| > 1\}$$
$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \in [1+1/n,n]} \{x\colon \|x\| = 1,\ \|T_t x\| \geq 1 + 1/k\}$$
$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \in [1+1/n,n] \cap \mathbb{Q}} \{x\colon \|x\| = 1,\ \|T_t x\| \geq 1 + 1/k\}$$
folgt $L \in \mathcal{B}(E)$.

Da jede Γ-Bahn die Menge L genau einmal schneidet, ist Φ eine Bijektion. Aus dem Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit folgt die Stetigkeit von Φ. Ein Theorem von Kuratowski ([24], Cor. I.3.3) liefert schließlich die Meß-

barkeit von ϕ^{-1}.

Somit ist dieser Satz bewiesen.

4.5 Bemerkungen

(1) E. Siebert ([28]) hat kürzlich gezeigt, daß auf einem endlich-dimensionalen Banachraum E stets ein abgeschlossener Querschnitt (C,Ψ) für Γ mit Schranken c_1 und c_2 existiert. Dabei läßt sich jedoch im allgemeinen nicht mehr $c_1 = c_2 = 1$ erreichen. Dieses Problem werden wir in II.4 ausführlich behandeln.

(2) Ist Γ eine normstetige Gruppe auf einem separablen Hilbertraum H mit normalem Generator A, so gilt (unabhängig von der Dimension von H) $L = \{x \in H: \|x\| = 1\}$, so daß dann (L,ϕ) ein abgeschlossener Querschnitt für Γ ist (vgl. II.4.2(2)).

Für einen Γ-Querschnitt (Q,χ) mit Schranken q_1, q_2 wollen wir nun den Zusammenhang zwischen Mengen der Gestalt $\{x \in E: \|x\| \geq r\}$ und solchen der Gestalt $\{T_t y: y \in Q, t \geq s\}$ $(r,s > 0)$ näher untersuchen. Diese Fragestellung taucht bei der Behandlung normaler Anziehungsbereiche von stabilen Maßen auf.

4.6 Lemma

Sei (Q,χ) ein Querschnitt für Γ mit Schranken q_1, q_2. Es gelten die folgenden beiden Aussagen

(i) Zu jedem $s > 0$ existiert ein $r_s > 0$ mit
$\{T_t y: y \in Q, t \geq s\} \subset \{x \in E: \|x\| \geq r_s\}$.

(ii) Sei nun $\omega_o^- > 0$, das heißt $\lim_{t\to o} \|T_t\| = 0$ (vgl. 4.1(iv)). Ferner seien zu $\omega > \omega_o^+$ und $\omega' \in (0,\omega_o^-)$ M_ω bzw. $M_{\omega'}$ gemäß 4.1(ii) gewählt.

Dann gilt für $r,t > 0$

$$T_r(\{x \in E: \|x\| \geq t\}) \subset \{T_s y: y \in Q,\ s \geq \left[\frac{t}{q_1 M_{\omega'}}\right]^{1/\omega'} \cdot r\}$$
$$\cup \{T_s y: y \in Q,\ s \geq \left[\frac{t}{q_1 M_\omega}\right]^{1/\omega} \cdot r\}.$$

Beweis: (i) Würde (i) nicht gelten, so gäbe es ein $s_o > 0$ sowie Folgen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(t_n \geq s_o)$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(x_n \in Q)$ mit $T_{t_n} x_n \not\to 0$ $(n\to\infty)$. Aus 4.1(vi) würde sich dann wegen $1/t_n \leq 1/s_o$ $(n\in\mathbb{N})$ ein Widerspruch ergeben.

(ii) Unter Verwendung von 4.1(ii) erhalten wir

$$T_r(\{x \in E: \|x\| \geq t\}) = \{x \in E: \|T_{1/r} x\| \geq t\}$$
$$= \{T_s y: y \in Q,\ s > 0,\ \|T_{s/r} y\| \geq t\}$$
$$\subset \{T_s y: y \in Q,\ s \in (0,r),\ \|T_{s/r}\| \geq t/q_1\}$$
$$\cup \{T_s y: y \in Q,\ s \geq r,\ \|T_{s/r}\| \geq t/q_1\}$$
$$\subset \{T_s y: y \in Q,\ s \geq (t/(q_1 M_{\omega'}))^{1/\omega'} \cdot r\}$$
$$\cup \{T_s y: y \in Q,\ s \geq (t/(q_1 M_\omega))^{1/\omega} \cdot r\}.$$

Dies war gerade zu zeigen.

Zu (ii) notieren wir noch folgende Vereinfachung.

4.7 Korollar

In der Situation von 4.6(ii) gilt

$$T_r(\{x \in E: \|x\| \geq t\})$$
$$\subset \begin{cases} \{T_s y: y \in Q,\ s \geq M(\omega,\omega') t^{1/\omega'} r\} & \text{, falls } t \in (0,1] \\ \{T_s y: y \in Q,\ s \geq M(\omega,\omega') t^{1/\omega} r\} & \text{, falls } t > 1. \end{cases}$$

Dabei ist $M(\omega,\omega') = \min((q_1 M_{\omega'})^{-1/\omega'}, (q_1 M_{\omega})^{-1/\omega})$.

Wir stellen nun noch einige Aussagen über adjungierte Operatorgruppen bereit. Diese sind in [5] zu finden.

4.8

Es sei $D(A')$ die Menge aller $x' \in E'$, für welche die Linearform $x \mapsto \langle Ax,x' \rangle$ auf $D(A)$ stetig ist. Diese läßt sich eindeutig auf E fortsetzen. Deshalb existiert ein eindeutig bestimmtes Element $A'x' \in E'$, so daß sich diese Linearform in der Form $x \mapsto \langle x,A'x' \rangle$ schreiben läßt. $A'\colon D(A') \to E'$ heißt Adjungierte zu A. Es gilt $\langle Ax,x' \rangle = \langle x,A'x' \rangle$ für $x \in D(A)$, $x' \in D(A')$ und $\sigma(A) = \sigma(A')$.

Da aber die zu Γ adjungierte Gruppe $\Gamma' := (T'_t)_{t>0}$ im allgemeinen nicht mehr stark-stetig ist, macht man folgende Konstruktion:

Es seien $E^\star := \{x' \in E' : \lim_{t \to 1} T'_t x' = x'\}$ sowie $T^\star_t := T'_t \big|_{E^\star}$ ($E^\star$ ist ein Γ'-invarianter Teilraum von E'). Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) $\Gamma^\star := (T^\star_t)_{t>0}$ ist eine stark-stetige Gruppe auf $E^\star$. $(A^\star, D(A^\star))$ sei ihr Generator.

(ii) $D(A^\star) = \{x' \in E' : x' \in D(A'),\ A'x' \in E^\star\}$, $A^\star = A' \big|_{D(A^\star)}$.

(iii) $\sigma(A) = \sigma(A^\star)$, $R\sigma(A) = P\sigma(A^\star)$.

(iv) Für die Punktspektren gilt der spektrale Abbildungssatz, das heißt $P\sigma(T^\star_t) = t^{P\sigma(A^\star)}$ $(t>0)$.

II. Stabilität auf dem $\mathbb{R}^d$

In diesem Kapitel bezeichne $\Gamma := (t^A)_{t>0}$ stets eine Gruppe von Automorphismen des $\mathbb{R}^d$ mit Generator A.

Dieses Kapitel enthält einige neue Resultate, die die bisher bekannten Ergebnisse über Γ-stabile Maße auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ ergänzen. Sie sind in den Paragraphen 2, 3 und 4 enthalten. Um sie besser in den Zusammenhang einreihen zu können, zitieren wir jeweils zu Beginn eines Paragraphen die wichtigsten, zu diesem Themenkreis bereits bewiesenen Ergebnisse.

In §1 wiederholen wir einige Eigenschaften stabiler Maße. Die Darstellung erfolgt in einer für unsere Zwecke geeigneten Form. Diesen Betrachtungen folgen in §2 einige Überlegungen zum normalen Anziehunsbereich eines Γ-stabilen Maßes. Wir beweisen eine neue Charakterisierung des normalen Anziehungsbereichs Γ-stabiler Poisson-Maße. Schließlich befassen wir uns in §3 mit der Existenz von Momenten von Maßen, die im normalen Anziehungsbereich Γ-stabiler Maße liegen.

Zum Schluß dieses Kapitels beschäftigen wir uns in §4 mit dem in I.4 eingeführten Γ-Querschnitt (L,Φ). Genauer fragen wir, wann Φ ein Homöomorphismus ist. Daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist, belegt ein ebenfalls in diesem Paragraphen behandeltes Beispiel.

1. Darstellung stabiler Maße

Wir geben zunächst folgende

1.1 Definition

Ein Maß $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^d)$ heißt Γ-stabil (stabil bezüglich Γ), falls zu je zwei Zahlen $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ ein $t_3 \in \mathbb{R}_+$ sowie ein $y \in \mathbb{R}^d$ existieren, so daß gilt

$$t_1^A(\mu) * t_2^A(\mu) = t_3^A(\mu) * \varepsilon_y .$$

Es ist offensichtlich, daß Γ-stabile Maße unendlich teilbar sind. Sie besitzen also nach I.1.4 eine Darstellung $[x,R,M]$.

Wir beschränken unsere Untersuchungen auf sogenannte volle Maße; dies sind Maße, deren Träger nicht in einer Hyperebene enthalten sind. Nach M. Sharpe ([27], Prop. 1) ist ein Maß μ genau dann voll, wenn $[|\hat{\mu}| = 1]$ keinen nichttrivialen linearen Teilraum des $\mathbb{R}^d$ enthält. Die Einschränkung auf volle Maße ist unwesentlich. Denn nicht volle, Γ-stabile Maße sind, nach eventuell notwendiger Translation, auf Γ-invariante Teilräume konzentriert, auf denen sie sowohl voll als auch bezüglich der eingeschränkten Gruppe stabil sind ([26], Theorem 3.5).

Die Bedeutung der vollen Maße besteht darin, daß für sie die Menge $\{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d): T(\mu) = \mu\}$ eine kompakte Gruppe bildet ([16], Prop. 1.2).

Die vollen, Γ-stabilen Maße lassen sich nun folgendermaßen charakterisieren

1.2

Sei $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^d)$ voll. μ ist genau dann Γ-stabil, wenn es ein $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt, so daß zu jedem $t > 0$ ein $x_t \in \mathbb{R}^d$ existiert mit

$$\mu^t = t^{A/\alpha}(\mu) * \varepsilon_{x_t}. \qquad (*)$$

Für den Kovarianz-Operator R und das Lévy-Maß M von μ ergibt sich daraus

$$t^A R\, t^{A'} = t^\alpha R, \quad t^A(M) = t^\alpha \cdot M \qquad (t>0).$$

Die Zahl α heißt der Index des Γ-stabilen Maßes μ.

1.3 Bemerkung

Die Existenz eines Operators αA in $(*)$ charakterisiert die vollen, operator-stabilen Maße ([27], Theorem 2); $\alpha^{-1}A$ heißt dann Exponent von μ. Dabei nennt man ein Maß $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^d)$ operator-stabil, falls ein Maß $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^d)$ sowie Folgen $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^d)$ und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^d$ existieren, so daß gilt $\lim_{k\to\infty} S_k(\nu^k) * \varepsilon_{x_k} = \mu$.

Der Zusammenhang zwischen Γ- und Operator-Stabilität läßt sich wie folgt beschreiben: Jedes volle, Γ-stabile Maß mit Index α ist operator-stabil und besitzt einen Exponenten $\alpha^{-1}A$; umgekehrt ist jedes volle, operator-stabile Maß stabil bezüglich der von seinen Exponenten erzeugten Einparametergruppen und besitzt den Index 1.

Das folgende Resultat geht auf M. Sharpe ([27]) zurück,

der das Spektrum von Exponenten voller, operator-stabiler Maße untersuchte.

Wir formulieren es für Γ-stabile Maße. Der Index α sei, wie auch im weiteren Verlauf, stets positiv.

1.4

Es existiert genau dann ein volles, Γ-stabiles Maß μ mit Index α, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Für jedes $\lambda \in \sigma(A)$ gilt $\mathrm{Re}\ \lambda \geq \alpha/2$.

(ii) Eigenwerte mit Realteil $\alpha/2$ sind einfache Eigenwerte von A.

Im Falle der Existenz eines vollen, Γ-stabilen Maßes μ gilt für den Gauß- bzw. Poisson-Anteil μ_G bzw. μ_P von μ:

(iii) Es existiert eine Zerlegung des $\mathbb{R}^d$ in A-invariante Teilräume $\mathbb{R}^d = S(\mu_G) \oplus \langle S(\mu_P)\rangle$.

(iv) Für die Spektren des auf diese Teilräume eingeschränkten Generators A gilt

$$\lambda \in \sigma(A|_{S(\mu_G)}) \Rightarrow \mathrm{Re}\ \lambda = \alpha/2,$$

$$\lambda \in \sigma(A|_{\langle S(\mu_P)\rangle}) \Rightarrow \mathrm{Re}\ \lambda > \alpha/2.$$

(v) μ_G und μ_P sind volle, bezüglich der von $A|_{S(\mu_G)}$ bzw. $A|_{\langle S(\mu_P)\rangle}$ erzeugten Einparametergruppe stabile Maße auf $S(\mu_G)$ bzw. $\langle S(\mu_P)\rangle$ mit Index α.

1.5 Bemerkungen

(1) Das Spektrum des Generators A liegt also rechts der imaginären Achse, sofern ein Γ-stabiles Maß existiert. Mit

I.4.1 ergeben sich daraus für Γ die Eigenschaften

$\lim_{t\to o} \|t^A\| = 0$ sowie $\|t^A\| \to \infty$ $(t\to\infty)$.

(2) Wenden wir 1.4 auf die spezielle Gruppe $\Gamma = (tI)_{t>o}$ an, so erhalten wir, daß die Γ-stabilen Maße entweder reine Gauß- ($\alpha=2$) oder reine Poisson-Maße ($0<\alpha<2$) sind. Darunter fällt natürlich auch die klassische Situation stabiler Maße auf $(\mathbb{R},\mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.

(3) Als weitere Konsequenz ergibt sich aus 1.4, daß man Gauß- und Poisson-Komponente Γ-stabiler Maße getrennt auf Stabilitätseigenschaften untersuchen kann.

Zum Schluß dieses Paragraphen geben wir eine Darstellung des Lévy-Maßes an als Integral über Lévy-Maße, die auf jeweils eine Bahn der Gruppe Γ konzentriert sind (vgl. [6], Theorem 2).

Wie man leicht einsehen kann, gilt Theorem 2 in [6] in folgender modifizierter Form:

1.6

Es seien $\mu = [x,R,M]$ ein volles, Γ-stabiles Maß mit Index α, (Q,χ) ein Γ-Querschnitt mit Schranken q_1 und q_2, γ_Q das durch $\gamma_Q(B) := \alpha M(\{t^A x: x\in B,\ t>1\})$ $(B\in\mathfrak{B}(Q))$ definierte endliche Maß auf Q und schließlich M_x das durch

$$M_x(D) := \int_o^\infty 1_D(t^A x)\, t^{-(\alpha+1)}\, dt \qquad (D\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d\setminus\{0\}))$$

definierte, auf $\{t^A x: t>0\}$ konzentrierte Maß $(x\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\})$.

Dann gilt

$$M(B) = \int_Q M_x(B)\, \gamma_Q(dx) \qquad (B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d\setminus\{0\})).$$

Für jedes $x\in\langle S(M)\rangle$ ist M_x ein Lévy-Maß.

2. Normale Anziehungsbereiche

Aus der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie ist bekannt, daß genau die stabilen Verteilungen auf $\mathbb{R}$ einen Anziehungsbereich besitzen.

Im Falle Γ-stabiler Maße auf $\mathbb{R}^d$ beschränken wir unsere Betrachtungen auf sogenannte normale Anziehungsbereiche. In Anlehnung an die klassische Situation geben wir folgende

2.1 Definition

Seien $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^d)$ ein Γ-stabiles Maß mit Index α und $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^d)$.

ν gehört zum normalen Anziehungsbereich $N(\mu)$ von μ, falls eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^d$ existiert, so daß gilt

$$\lim_{n \to \infty} n^{-A/\alpha}(\nu^n) * \varepsilon_{x_n} = \mu .$$

Aus 1.1 kann unmittelbar abgeleitet werden, daß ein Γ-stabiles Maß μ stets einen Anziehungsbereich besitzt, denn es gilt $\mu \in N(\mu)$. Umgekehrt sind die Grenzwerte der in 1.3 auftretenden Folgen stets stabil bezüglich Γ ([17], Prop. 3.3). Dies gilt sogar in der allgemeinen Situation separabler Banachräume.

In [9] wurde bewiesen, daß der normale Anziehungsbereich nicht von α und A abhängt, sofern diese Größen (*) in 1.2 erfüllen. Mit anderen Worten ist μ stabil bezüglich der Gruppen Γ_1, Γ_2, so ist der normale Anziehungsbereich von μ bezüglich Γ_1 der gleiche wie bezüglich Γ_2. Dies beruht im wesentlichen auf der Kompaktheit von $\{T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^d)\colon T(\mu) = \mu$.

Für die Untersuchung des normalen Anziehungsbereichs eines Gauß-Maßes kann daher stets $A = I$ und $\alpha = 2$ gewählt werden. Dadurch wird eine wesentliche Vereinfachung erreicht, da man dann genau die im zentralen Grenzwertsatz behandelte Situation vorliegen hat.

Bevor wir uns den einzelnen Resultaten zuwenden, sei auf folgende Schwierigkeit hingewiesen.

2.2 Bemerkung

Es seien (L,Φ) der in I.4 eingeführte Γ-Querschnitt sowie $\gamma := \gamma_L$ wie in 1.6.

Im Zusammenhang mit Fragen über normale Anziehungsbereiche tritt die schwache Konvergenz der Maße $n[n^{-A/\alpha}(\nu)|_{U_\delta^c}]$ gegen $M|_{U_\delta^c}$ auf $(\nu \in N(\mu), \delta > 0$ mit $M(\partial U_\delta) = 0)$. Man vergleiche hierzu I.3.1(i).

Die Mengen der Gestalt $[B,t_o] := \{t^A x: x \in B, t > t_o\}$ $(B \in \mathcal{B}(L), t_o \in \mathbb{R}_+)$ haben einerseits positiven Abstand von Null und erzeugen andererseits die σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ (I.4.6(i) bzw. I.4.4). Daher taucht die Frage auf, ob obige Konvergenz durch die Konvergenz auf M-randlosen Mengen dieser speziellen Gestalt beschrieben werden kann.

Diese Frage wurde in [9] bejaht. Allerdings wurde dort davon ausgegangen, daß für jede γ-randlose Teilmenge B von L die Menge $[B;1]$ M-randlos (in $\mathbb{R}^d$) sei. Dies trifft im allgemeinen aber nicht zu. Wir geben hierzu in §4 ein Beispiel.

Die Argumentation in [9] bleibt jedoch richtig, falls

die Abbildung Φ ein Homöomorphismus ist. Wegen 1.5(1) und I.4.3 ist dies genau dann der Fall, wenn (L,Φ) ein abgeschlossener Querschnitt für Γ ist.

Außerdem stellt man fest, daß die Gültigkeit von Theorem 1 in [9] nicht von der speziellen Lage der Menge L (in der Einheitssphäre) abhängt.

Da nach I.4.5(1) für den endlich-dimensionalen Fall stets ein abgeschlossener Γ-Querschnitt (C,Φ) mit Schranken c_1 und c_2 existiert, zitieren wir dieses Theorem mit den entsprechenden Modifizierungen.

2.3

Es seien $\mu = \mu_G * \mu_P$ ein volles, Γ-stabiles Maß mit Index α, (C,Φ) ein abgeschlossener Γ-Querschnitt mit Schranken c_1, c_2 sowie γ_C das gemäß 1.6 definierte Maß auf C. P_G bezeichne die Projektion auf $S(\mu_G)$.

Ein Maß $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^d)$ liegt genau dann im normalen Anziehungsbereich von μ, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Für jede γ_C-randlose Menge $B \in \mathcal{B}(C)$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} t^{\alpha}\nu(\{s^A x: x \in B,\ s > t\}) = \alpha^{-1}\gamma_C(B).$$

(ii) $P_G(\nu)$ und μ_G besitzen denselben Kovarianz-Operator.

Für volle, Γ-stabile Poisson-Maße kann unabhängig von speziellen Γ-Querschnitten folgende Charakterisierung des normalen Anziehungsbereichs bewiesen werden:

2.4 Satz

Sei $\mu = [x,0,M]$ ein volles, Γ-stabiles Maß mit Index α.

Für ein Maß $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^d)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) ν liegt im normalen Anziehungsbereich von μ.

(ii) Für jedes $\delta > 0$ mit $M(\partial U_\delta) = 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} n[n^{-A/\alpha}(\nu)|_{U_\delta^c}] = M|_{U_\delta^c}.$$

Beweis: Aus (i) folgt mit I.3.1(i) sofort Bedingung (ii).

Setzen wir umgekehrt (ii) voraus, so genügt es, I.3.1(ii) für $\phi \equiv 0$ nachzuweisen. Dazu zeigen wir

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} n \int_{U_\varepsilon} \|x\|^2 \, n^{-A/\alpha}(\nu)(dx) = 0.$$

Mit der Bezeichnung $\mu_n := n \cdot n^{-A/\alpha}(\nu)$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt

$$\int_{U_{\varepsilon_\delta}} \|x\|^2 \, \mu_n(dx) = 2 \int_{t=0}^{\varepsilon} \int_{s=0}^{t} s \, ds \, (\|\mu_n\|)(dt)$$

$$\leq 2 \int_{s=0} s \, \mu_n(\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \geq s\}) \, ds.$$

Mit Hilfe des Lemmas von Fatou und der Voraussetzung erhalten wir

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{U_\varepsilon} \|x\|^2 \, \mu_n(dx) \leq 2 \int_0^{\varepsilon} s \, M(\{x : \|x\| \geq s\}) \, ds.$$

Wir wählen ohne Einschränkung $\varepsilon < 1$. Dann existiert nach I.4.7 zu $\omega' \in (0,\omega_0')$ ein $M_{\omega'} > 0$, so daß zusammen mit 1.2 folgt

$$\overline{\lim_n} \int_{U_\varepsilon} \|x\|^2 \, \mu_n(dx) \leq 2 \int_0^\varepsilon s \, M(\{T_t y: y \in L, \, t \geq M_\omega, s^{1/\omega'}\}) \, ds$$

$$= 2 \int_0^\varepsilon s^{1-\alpha/\omega'} \, M(\{T_t y: y \in L, \, t \geq M_\omega,\}) \, ds.$$

Da nun μ als reines Poisson-Maß vorausgesetzt wurde, folgt aus 1.4(iv) $\alpha < 2\omega_o^-$. Deshalb kann in obigem Integranden ein ω' mit $\alpha < 2\omega' < 2\omega_o^-$ gewählt werden. Somit sind die Integrale endlich und konvergieren für $\varepsilon \to 0$ gegen Null.

Damit ist die Behauptung gezeigt.

3. Momente

Wir zitieren zunächst Resultate von Z.J. Jurek ([14]) über die Existenz von Momenten von Maßen, die im normalen Anziehungsbereich Γ-stabiler Maße liegen. Sie gelten also insbesondere für die Γ-stabilen Maße selbst.

Gauß- und Poisson-Anteil werden getrennt behandelt.

3.1

a) Sei $\mu = [x,0,M]$ ein volles, Γ-stabiles Maß mit Index α. Dann gilt:

(1) Für $\nu \in N(\mu)$ existiert das r-te Moment, falls

$$r < \alpha(\max\{\mathrm{Re}\ \lambda: \lambda \in \sigma(A)\})^{-1}.$$

(2) Für $r \geq \alpha(\max\{\mathrm{Re}\ \lambda : \lambda \in \sigma(A)\})^{-1}$ existiert das r-te Moment von μ nicht.

b) Liegt ein Maß $\nu \in \mathcal{M}^1(E)$ im normalen Anziehungsbereich eines vollen, Γ-stabilen Gauß-Maßes, so besitzt ν endliches zweites Moment.

Erinnern wir uns an den klassischen Fall eines stabilen Poisson-Maßes μ auf $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Index $\alpha \in (0,2)$. Dort existiert für $r > \alpha$ das r-te Moment eines Maßes $\nu \in N(\mu)$ nicht ([11], §34 Satz 5).

Ähnliche Resultate in der Situation Γ-stabiler Maße auf $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ wurden bisher nur in der Form von 3.1a)(2) bewiesen; das heißt die Nicht-Existenz von Momenten wurde nur für die Γ-stabilen Maße selber betrachtet.

Wir geben eine Verallgemeinerung des oben für $\mathbb{R}$ zitierten Ergebnisses.

3.2 Satz

Sei $\mu = [x,0,M]$ ein volles, Γ-stabiles Maß mit Index α.

Für $\nu \in N(\mu)$ existiert das r-te Moment nicht, sofern $r > \alpha(\min\{\mathrm{Re}\ \lambda : \lambda \in \sigma(A)\})^{-1}$ gilt.

Auf einen Beweis können wir an dieser Stelle verzichten, da sich 3.2 als Spezialfall aus III.5.4 ergibt. Man beachte, daß nach I.4.5(1) ein abgeschlossener Γ-Querschnitt (C,Ψ) mit Schranken c_1, c_2 existiert.

Damit beenden wir die Untersuchung Γ-stabiler Maße auf

endlich-dimensionalen Räumen.

Bevor wir uns dem Fall separabler Banachräume zuwenden, befassen wir uns mit dem in I.4 eingeführten Γ-Querschnitt (L,Φ).

4. Der Γ-Querschnitt (L,Φ)

Es bezeichne S^{d-1} die Menge $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$ $(d \geq 2)$. Gegeben sei eine Gruppe $(t^A)_{t>0}$ mit $\{\mathrm{Re}\ \lambda : \lambda \in \sigma(A)\} \subset \mathbb{R}_+$. Weiterhin seien wie in I.4

$$L = \{x \in S^{d-1} : \|t^A x\| > 1 \text{ für alle } t > 1\} \text{ sowie}$$
$$\Phi : L \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^d \setminus \{0\};\ (x,t) \mapsto t^A x.$$

Nach I.4.4 ist (L,Φ) stets ein Querschnitt für Γ. Er ist genau dann abgeschlossen, wenn Φ ein Homöomorphismus ist (I.4.3).

Wie 2.2 zeigt, ist für Untersuchungen über den normalen Anziehungsbereich stabiler Maße jedoch die Existenz eines abgeschlossenen Γ-Querschnitts notwendig. Die Existenz eines solchen Querschnitts ist durch I.4.5(1) sichergestellt. Über die zugehörigen Schranken wird dort aber keine Aussage gemacht. Außerdem ist eine konkrete Beschreibung dieses Querschnitts nicht so einfach möglich, wie dies für (L,Φ)

der Fall ist.

Deshalb behandeln wir nun die Frage, für welche Gruppen Γ der Querschnitt (L,ϕ) abgeschlossen ist. Daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist, zeigt das folgende

4.1 Beispiel

Auf $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die Gruppe $\Gamma = (t^A)_{t>0}$, deren Generator A durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$ gegeben ist.

A besitzt die Eigenwerte $1 + i$ und $1 - i$.

Weiter gilt für $t = e^s$ $(s \in \mathbb{R})$

$$t^A = e^{sA} = e^s \begin{pmatrix} \cos s + \sin s & \sin s \\ -2\sin s & \cos s - \sin s \end{pmatrix}.$$

1. Bild 1 (S. 29) zeigt den Verlauf der Γ-Bahnen im Bereich der Einheitssphäre S^1. Das uns interessierende Gebiet liegt dort, wo diese Bahnen S^1 mehrfach schneiden. Wir beschränken uns auf den im oberen Teil durch ein Rechteck ausgezeichneten Bereich. Dazu wenden wir uns Bild 2 (S. 30) zu. Durch Vergrößerung und Verzerrung des ausgezeichneten Bereichs verschafft uns dieses einen genaueren Einblick.

Betrachten wir zunächst die Γ-Bahnen durch die Punkte $P_1 = (-0,3;(0,91)^{-1/2})$, $P_2 = (0;1)$ und $P_3 = (5^{-1/2};2\cdot 5^{-1/2})$. Sowohl in P_2 als auch in P_3 tangieren die jeweiligen Bahnen S^1. Da sich verschiedene Bahnen nicht schneiden können, leiten wir aus der graphischen Darstellung folgendes ab: (Es bezeichne (P_1,P_2), $[P_1,P_2]$, $(P_1,P_2]$ den offenen, abgeschlossenen bzw. halboffenen Kreisbogen zwischen P_1 und P_2)

Bild 1:

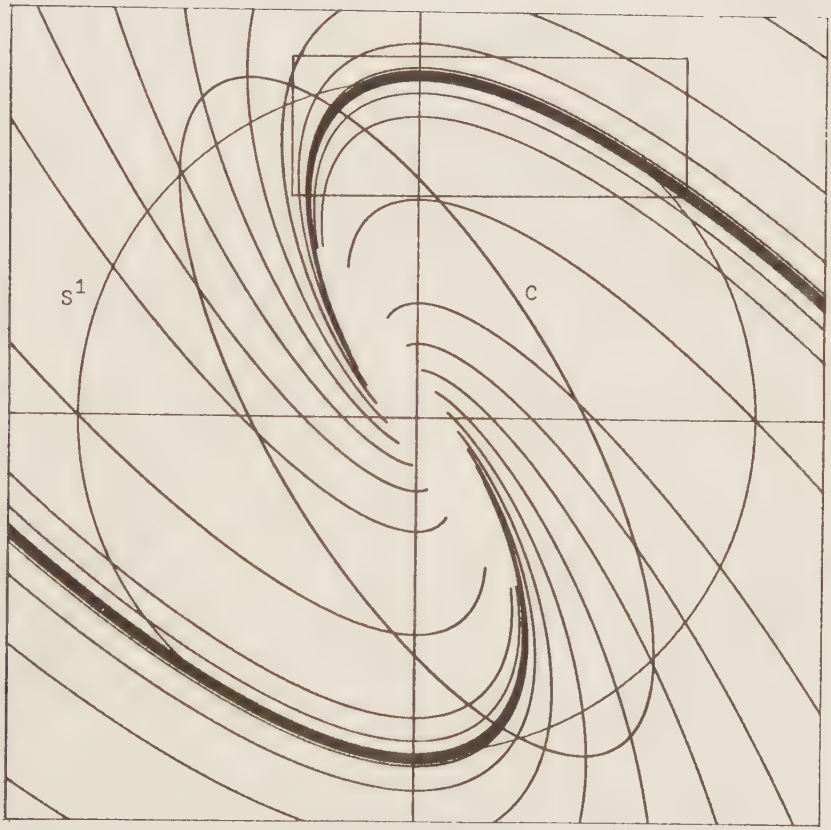
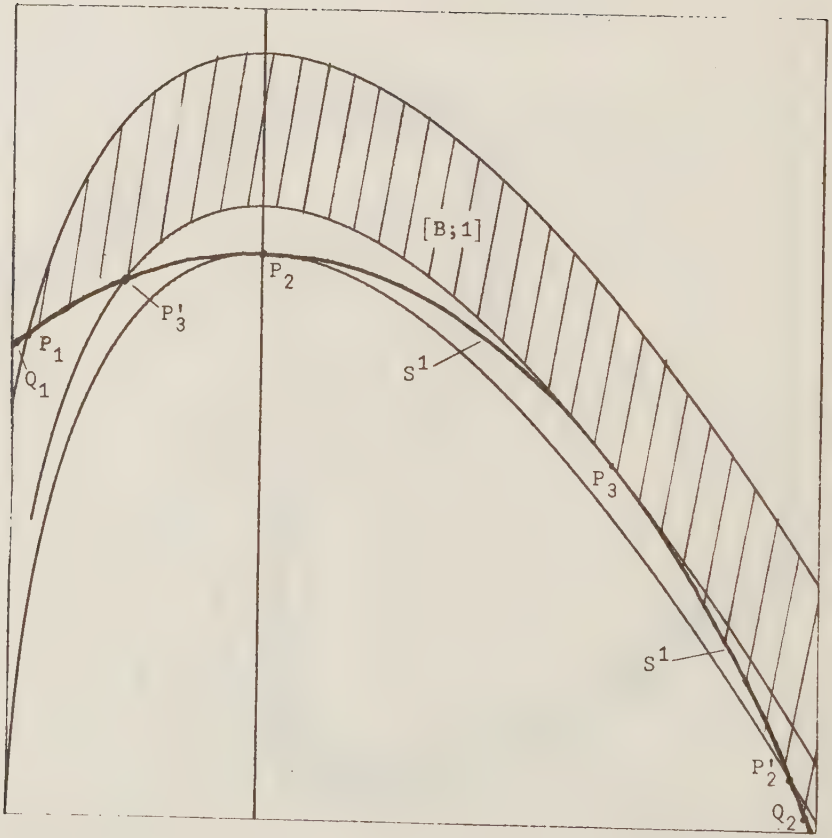


Bild 2:



(i) $[Q_1, P_3'] \in L$.

(ii) $[P_3', P_3) \notin L$.

(iii) $[P_3, Q_2] \in L$.

Aus (i) und (ii) folgt sofort, daß L nicht abgeschlossen ist. Also kann Φ kein Homöomorphismus sein.

2. Wir können nun auch die Behauptung in 2.2 belegen. Dazu geben wir ein Lévy-Maß M und eine Borelsche Teilmenge B in L an, so daß folgendes gilt: Der Rand $\partial' B$ von B in L besitzt γ-Maß Null, aber die Menge $[B;1] := \{t^A x : x \in B, t > 1\}$ ist nicht M-randlos.

Es seien dazu

$$M(D) := \int_0^\infty 1_D(t^A P_3)\, t^{-2}\, dt \qquad (D \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}))$$

sowie $B := [P_1, P_3') \cup [P_3, P_2']$.

Wegen $\{\mathrm{Re}\ \lambda : \lambda \in \sigma(A)\} = \{1\}$ ist M ein Lévy-Maß.

Für das Maß γ auf L gilt $\gamma = \varepsilon_{P_3}$. Aus (i)-(iii) erhalten wir $\partial' B = \{P_1, P_2'\}$, also $\gamma(\partial' B) = 0$.

Der Rand von $[B;1]$ läßt sich wie folgt beschreiben:

$$\partial[B;1] = \{t^A P_1 : t \geq 1\} \cup [P_1, P_3'] \cup \{t^A P_3 : t \in [t_{P_3'}, 1]\}$$

$$\cup [P_3, P_2'] \cup \{t^A P_2' : t \geq 1\} \qquad (t_{P_3'} \approx 0{,}585).$$

Daraus wird ersichtlich, daß $M(\partial[B;1]) = \int_{t_{P_3'}}^1 t^{-2}\, dt > 0$ gelten muß.

Das volle Poisson-Maß $\mu = [0,0,M]$ erfüllt wegen $t^A(M) = t \cdot M$ $(t>0)$ (*) in 1.2. Daher ist μ Γ-stabil mit Index 1.

3. Die naheliegende Vermutung, daß die Γ-Bahnen $\{t^A x: t > 0\}$ ($x \in S^1$) ab einem hinreichend groß gewählten t_o (gleichmäßig in x) nicht mehr rückläufig sein können, wird ebenfalls durch dieses Beispiel widerlegt. (In diesem Fall hätte man einen abgeschlossenen Γ-Querschnitt (C,Ψ) mit Schranken $c_1 = c_2 = r$ dadurch bekommen, daß man für passend großes $r > 0$ $C = \{x \in \mathbb{R}^2: \|x\| = r\}$ gewählt hätte.)

Dazu betrachte man in unserem Beispiel die Γ-Bahn durch P_2:

$$e^{sA}P_2 = e^s \begin{pmatrix} \sin s \\ \cos s - \sin s \end{pmatrix} \qquad (s \in \mathbb{R}).$$

Es folgt $f(s) := \|e^{sA}P_2\|^2 = e^{2s}(1 - 2\cos s \sin s + \sin^2 s)$. Für die Ableitung f' von f ergibt sich hieraus

$$f'(s) = 2e^{2s}\sin s\,(3\sin s - \sin s) \qquad (s \in \mathbb{R}).$$

Es gibt also beliebig große Parameter s mit $f'(s) < 0$, das heißt die Γ-Bahn durch P_2 ist immer wieder einmal rückläufig.

4. Schließlich geben wir noch einen (nach I.4.5(1) existierenden) abgeschlossenen Querschnitt für Γ an: Wir betrachten A als Matrix auf $\mathbb{C}^2$. Da sie die Eigenwerte $1 + i$ und $1 - i$ besitzt, existiert eine (komplexe) Transformationsmatrix T mit

$$T^{-1} A\, T = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Für die hiervon erzeugte Einparametergruppe $\tilde{\Gamma}$ gilt

$$e^{tT^{-1}AT} = T^{-1}e^{tA}T = e^t \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Jede Bahn bezüglich der Gruppe $\tilde{\Gamma}$ schneidet also die komplexe Einheitssphäre $S^1_{\mathbb{C}}$ genau einmal.

Wir definieren nun $C := T(S^1_{\mathbb{C}}) \cap \mathbb{R}^2$. Wie eine leichte Rechnung zeigt, besitzt C mit jeder Γ-Bahn genau einen Schnittpunkt. Mit $\Psi\colon C \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; $(x,t) \mapsto t^A x$, $c_1 = \inf\{\|x\|\colon x \in C\}$ und $c_2 = \sup\{\|x\|\colon x \in C\}$ erhalten wir also einen abgeschlossenen Γ-Querschnitt (C,Ψ) mit Schranken c_1 und c_2.

Genauer gilt

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y-x \end{pmatrix}\colon x,y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 = 0.5 \right\},$$

das heißt C ist eine Ellipse. Die graphische Darstellung von C findet man in Bild 1.

Schließlich fassen wir einige weitere Überlegungen zur Abgeschlossenheit der Menge L zusammen unter

4.2 Bemerkungen

(1) L stimmt genau dann mit S^{d-1} überein, wenn für jedes $t \in (0,1)$ gilt: $\|t^A\| < 1$.

[Gelte $L = S^{d-1}$. Weiterhin sei $t \in (0,1)$. Dann existiert ein x in L mit $\|t^A\| = \|t^A x\|$. Wäre nun $\|t^A x\| \geq 1$, so gäbe es ein $t_o \leq t$ mit $\|t_o^A x\| = 1$. Daraus würde $t_o^A x \in L$ und daher $t_o = 1$ folgen, im Widerspruch zu $t_o \leq t < 1$.

Sei nun umgekehrt $\|t^A\| < 1$ für alle $t \in (0,1)$. Für $0 < t_1 < t_2$ und $x \in L$ gilt dann $\|t_1^A x\| \leq \|(t_1/t_2)^A\|\ \|t_2^A x\| < \|t_2^A x\|$. Also kann jede Γ-Bahn S^{d-1} nur einmal schneiden. Es folgt $L = S^{d-1}$.]

(2) Ist der Generator A der Gruppe Γ normal, so sind auch

alle Operatoren t^A ($t>o$) normal. Wegen $\|t^A\| = r(t^A)$ folgt dann mit (iii) und (v) aus I.4.1 $\|t^A\| = t^{s^-(A)} < 1$, falls $t < 1$. Nach (1) ist daher (L,Φ) ein abgeschlossener Querschnitt für Γ.

Wie der Beweis von (1) zeigt, bleibt Aussage (2) für normstetige Gruppen Γ auf separablen Hilberträumen richtig.

(3) Für die Untersuchung des normalen Anziehungsbereichs $N(\mu)$ eines vollen, Γ-stabilen Maßes μ hat (2) folgende Konsequenz: Da $N(\mu)$ im Sinne der Bemerkung nach 2.1 nicht von Γ abhängt, kann zur Charakterisierung von $N(\mu)$ in 2.3 immer dann $(C,\Psi) = (L,\Phi)$ gewählt werden, wenn es eine Gruppe $\tilde{\Gamma}$ normaler Operatoren gibt, bezüglich der μ stabil ist.

Beispiel hierfür sind die von W.N. Hudson und J.D. Mason in [10] eingeführten elliptisch symmetrischen Maße. Diese sind stets $(t^{cI})_{t>o}$-stabil mit Index 1 für ein gewisses $c \geq 0.5$.

(4) Die Menge L ist stets symmetrisch zum Nullpunkt, wie sich sofort aus ihrer Definition ableiten läßt.

Falls nun (L,Φ) abgeschlossen, also Φ^{-1} stetig ist, so ist $L \times \mathbb{R}_+$ und damit auch L zusammenhängend. Daher gilt im $\mathbb{R}^2$: (L,Φ) ist genau dann abgeschlossen, wenn L mit S^1 übereinstimmt.

III. Stabile Maße auf separablen Banachräumen

Es bezeichnen stets E einen reellen separablen Banachraum und $\Gamma := (T_t)_{t>0}$ eine stark-stetige Gruppe von Operatoren auf E mit Generator (A,D(A)). Für jedes $x \in E \setminus \{0\}$ gelte $\lim_{t \to 0} \|T_t x\| = 0$ sowie $\|T_t x\| \longrightarrow \infty \quad (t \to \infty)$.

In diesem Kapitel befassen wir uns mit Ausdehnungen der in Kapitel II erhaltenen Resultate auf separable Banachräume. Dabei wird sich sehr schnell herausstellen, daß wir von vielen Schlußweisen, wie zum Beispiel Kompaktheitsargumenten oder spektraltheoretischen Beweisideen, Abstand nehmen müssen, da sich diese für unendlich-dimensionale Räume nicht eignen.

Zu den bisher betrachteten normstetigen Einparametergruppen kommen nun noch die stark-stetigen hinzu. Es wird bewußt zunächst dieser doch sehr allgemeine Rahmen gewählt, um zu sehen, was man hier noch erhalten kann. Spezialisierungen, etwa auf Hilberträume oder aber weitergehende Forderungen an die Operatorgruppen, werden wir, wo sie sinnvoll erscheinen, stets vornehmen.

Wir geben eine kurze inhaltliche Übersicht: In §1 beweisen wir eine zum endlich-dimensionalen Fall völlig analoge Darstellung der Fourier-Transformierten Γ-stabiler Maße. Zusammenhänge zwischen dem Index Γ-stabiler Maße und dem Spektrum des Generators der Gruppe Γ werden in §2 aufgezeigt.

In §3 beschäftigen wir uns ausführlich mit dem normalen Anziehungsbereich Γ-stabiler Maße. Nach der Behandlung notwendiger und hinreichender Bedingungen kommen wir zum Hauptresultat dieses Paragraphen, Theorem 3.11. Dieses beinhaltet eine Charakterisierung des normalen Anziehungsbereichs Γ-stabiler Poisson-Maße auf Banachräumen vom Typ p. Normale Anziehungsbereiche von Gauß-Maßen sind Gegenstand der Untersuchungen in §4.

Schließlich führt in §5 die Untersuchung der Existenz von Momenten von Maßen im normalen Anziehungsbereich Γ-stabiler Maße zu ähnlichen Ergebnissen wie in II.3.

1. Die Fourier-Transformierte Γ-stabiler Maße

In Analogie zu II.1.1 geben wir folgende

1.1 Definition

Ein Maß $\mu \in \mathcal{M}^1(E)$ heißt Γ-stabil, falls zu je zwei Zahlen t_1, $t_2 \in \mathbb{R}_+$ ein $t_3 \in \mathbb{R}_+$ sowie ein $y \in E$ existieren, so daß gilt

$$T_{t_1}(\mu) * T_{t_2}(\mu) = T_{t_3}(\mu) * \epsilon_y.$$

Wiederum erhalten wir die unendliche Teilbarkeit Γ-stabiler Maße und damit vermöge I.1.4 eine Darstellung $\mu = [x,R,M]$.

Wie Z.J. Jurek ([17], Theorem 3.2) zeigte, läßt sich II.1.2 auf separable Banachräume übertragen.

1.2

Ein Maß $\mu \in \mathcal{M}^1(E)$ ist genau dann Γ-stabil, wenn es ein $\alpha > 0$ gibt, so daß zu jedem $t > 0$ ein $x_t \in E$ existiert mit

$$\mu^t = T_{t^{1/\alpha}}(\mu) * \varepsilon_{x_t}.$$

Für $\mu = [x,R,M]$ hat man dann

$$T_t\, R\, T_t' = t^\alpha R, \quad T_t(M) = t^\alpha \cdot M \qquad (t>0).$$

Die Zahl α heißt der Index von μ.

Gehen wir an dieser Stelle noch einmal auf die Operator-Stabilität ein. Ausgehend von der Definition in II.1.3 stellt W. Krakowiak ([19]) in unendlich-dimensionalen Räumen an die Folge $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die zusätzliche Bedingung, daß die von der Menge $\{S_m S_n^{-1}: n = 1,\ldots,m;\ m \in \mathbb{N}\}$ erzeugte Halbgruppe bezüglich der Normtopologie auf $\mathcal{L}(E)$ relativ kompakt sein soll.

Daraus erhält er, daß die bezüglich normstetigen Gruppen stabilen Maße auch operator-stabil sind. Umgekehrt beweist Krakowiak, daß ein volles, operator-stabiles Maß μ einen Exponenten $B \in \mathcal{L}(E)$ besitzt. Daraus folgt die $(t^B)_{t>0}$-Stabilität von μ. Weiterhin gilt für B $\lim_{t \to o} \| t^B \| = 0$.

Die vollen, operator-stabilen Maße auf $(E,\mathcal{L}(E))$ entsprechen also genau den vollen, bezüglich normstetigen Gruppen stabilen Maßen auf $(E,\mathcal{L}(E))$.

Wir wenden uns nun dem Lévy-Maß Γ-stabiler Maße zu. Um eine Integraldarstellung für dieses beweisen zu können, ist es erforderlich, den Begriff der "Polardarstellung" bezüglich Γ wieder aufzugreifen. Wir erinnern dazu an den Γ-Querschnitt (L,Φ) aus I.4, den wir in diesem Kapitel stets zugrundelegen wollen.

Es seien also $L = \{x \in E: \|x\| = 1, \|T_t x\| > 1 \ \forall t > 1\}$ und $\Phi: L \times R_+ \longrightarrow E \setminus \{0\}; (x,t) \mapsto T_t x$.

1.3 Satz

Es seien $\mu = [x,R,M]$ ein Γ-stabiles Maß mit Index α und γ das durch $\gamma(D) := \alpha M(\{T_t x: x \in D, t > 1\})$ $(D \in \mathcal{B}(L))$ definierte endliche Maß auf L.

Dann gilt für $B \in \mathcal{B}(E \setminus \{0\})$

$$M(B) = \int_L \int_0^\infty 1_B(T_t x)\, t^{-(\alpha+1)}\, dt\, \gamma(dx).$$

Beweis: Offensichtlich gilt die Gleichheit für Mengen der Gestalt $B = \{T_t x: x \in D, t > t_o\}$ $(D \in \mathcal{B}(L), t_o > 0)$. Mit I.4.4 folgt daraus die Behauptung.

Zur Umkehrung von 1.3 ist folgendes zu bemerken: Sei $\mu = [x,R,M]$ ein unendlich teilbares Maß auf $(E,\mathcal{B}(E))$. Existieren dann $\alpha > 0$ sowie ein endliches Maß γ auf L, so daß M obige Darstellung besitzt und $T_t R T_t' = t^\alpha R$ für jedes $t > 0$ gilt, so folgt aus 1.2 die Γ-Stabilität von μ.

Zusammenfassend halten wir nun fest

1.4 Korollar

Ein Maß $\mu \in \mathcal{M}^1(E)$ ist genau dann Γ-stabil, wenn die Fourier-Transformierte von μ die folgende Darstellung besitzt:

$$\hat{\mu}(x') = \exp\Big[i\langle x',x\rangle - \tfrac{1}{2}\langle x',Rx'\rangle + \int_L \int_0^\infty (e^{i\langle x',T_t x\rangle} - 1 - i\langle x',T_t x\rangle 1_U(T_t x))\, t^{-(\alpha+1)}\, dt\, \gamma(dx)\Big]$$

für jedes $x' \in E'$.

Dabei sind $\alpha > 0$, $x \in E$, R ein Kovarianz-Operator mit $T_t R T_t' = t^\alpha R$ $(t>0)$ sowie γ ein endliches Maß auf L.

1.5 Bemerkung

Es liege die Situation von 1.3 vor. Das Lévy-Maß M ist darstellbar als ein Integral über die durch

$$M_x(B) := \int 1_B(T_t x)\, t^{-(\alpha+1)}\, dt \qquad (B \in \mathcal{B}(E \setminus \{0\}),\ x \in L)$$

definierten Maße M_x, die auf einzelne Γ-Bahnen konzentriert sind. Wir wollen der Frage nachgehen, wann diese Maße selbst Lévy-Maße sind. (Für $E = \mathbb{R}$ ist dies für jedes $x \in \langle S(M)\rangle$ der Fall.)

Wir ziehen I.2.3(i) heran: Zunächst gilt stets $M_x(U^c) < \infty$ $(x \in L)$.

Es seien E vom Typ p, $\omega_o^- > 0$ sowie $\alpha < p\omega_o^-$. Zu $\omega' \in (0,\omega_o^-)$ mit $\alpha < p\omega'$ wählen wir $M_{\omega'}$ gemäß I.4.1(ii). Dann ergibt sich für $x \in L$, $t_o \in (0,1)$

$$\int_0^{t_o} \|T_t x\|^p\, t^{-(\alpha+1)}\, dt \le M_{\omega'} \int_0^{t_o} t^{p\omega'-\alpha-1}\, dt < \infty.$$

Somit ist unter diesen Voraussetzungen die Funktion

$\min(1, \|\cdot\|^p)$ M_x-integrierbar ($x \in L$). Also sind nach I.2.3(i) die Maße M_x ($x \in L$) Lévy-Maße.

Diese Bemerkung zeigt auf, wie man Beispiele Γ-stabiler Poisson-Maße angeben kann. Wir tun dies für eine spezielle Gruppe Γ auf einem Hilbertraum.

1.6 Beispiel

Es bezeichne H den reellen Hilbertraum $L^2([1,2], \mathfrak{B}([1,2]), \lambda_{[1,2]})$, versehen mit dem inneren Produkt $(f|g) = \int fg \, d\lambda_{[1,2]}$. $\lambda_{[1,2]}$ sei dabei das Lebesgue-Maß auf $[1,2]$.

Auf H betrachten wir den Multiplikations-Operator $A: f \longrightarrow h \cdot f$, wobei h die identische Abbildung auf $[1,2]$ sei. Es gilt also $(Af)(x) = xf(x)$ für alle $x \in [1,2]$.

A ist ein normaler Operator. Sein Spektrum stimmt mit $h([1,2])$ überein, das heißt $\sigma(A) = [1,2]$.

Somit ergibt sich für die von A erzeugte normstetige Gruppe $(T_t)_{t>0} = (t^A)_{t>0}$ normaler Operatoren auf H

(i) $T_t f = t^h \cdot f$ für jedes $t > 0$.

(ii) $$\|T_t\| = r(T_t) = \begin{cases} t^2 & , \text{falls } t > 1 \\ t & , \text{falls } t < 1. \end{cases}$$

Sei nun $f_o := (b-a)^{-1/2} \, 1_{[a,b]}$ $(1 \leq a < b \leq 2)$. Wir definieren Maße M_α durch

$$M_\alpha(B) := \int_0^\infty 1_B(T_t f_o) \, t^{-(\alpha+1)} \, dt \quad (B \in \mathfrak{B}(E), \alpha > 0).$$

Diese sind auf die Γ-Bahn $\{T_t f_o : t > 0\}$ konzentriert.

Die Behauptung lautet nun: Für $\alpha < 2a$ ist M_α ein Lévy-Maß.

Nach I.1.2(2) ist die M_α-Integrierbarkeit von $\min(1, \|\cdot\|^2)$

zu zeigen.

Dazu berechnen wir vorab $\|T_t f_o\|$ $(t>o)$. Es gilt

$$\|T_t f_o\|^2 = \int_1^2 |T_t f_o(x)|^2 \, dx = (b-a)^{-1} \int_a^b t^{2x} \, dx$$

$$= \begin{cases} (b-a)^{-1}(t^{2b} - t^{2a})/(2\log t) \\ 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} t^{2a}(t^{2(b-a)} - 1)/\log(t^{2(b-a)}) & \text{für } t \neq 1 \\ 1 & \text{für } t = 1. \end{cases}$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Funktion $t \mapsto \|T_t f_o\|^2$ auf $\mathbb{R}_+$ stetig ist. Außerdem folgt aus der Abschätzung $\log t < t-1$ $(t>o)$ $\|T_t f_o\|^2 < t^{2a}$ $(t<1)$ sowie $\|T_t f_o\|^2 > t^{2a}$ $(t>1)$.

Daraus läßt sich sofort die Endlichkeit des Integrals

$\int_o^{t_o} \|T_t f_o\|^2 \, t^{-(\alpha+1)} dt$ für $\alpha \in (0,2a)$ und festes $t_o > 0$ ableiten.

Da zudem für alle $\alpha > 0$ $M_\alpha(U^C) < \infty$ gilt, ergibt sich die M_α-Integrierbarkeit von $\min(1, \|\cdot\|^2)$ für jedes $\alpha \in (0,2a)$.

Weiterhin folgt $f_o \in L$ wegen $\|T_t f_o\| = 1 \Leftrightarrow t = 1$.

Wählen wir nun in 1.4 $\gamma = \varepsilon_{f_o}$, so wird deutlich, daß die verallgemeinerten Poisson-Maße $\tilde{e}(M_\alpha)$ $(t^A)_{t>o}$-stabil sind mit Index α.

2. Der Index Γ-stabiler Maße

In diesem Paragraphen soll der Zusammenhang zwischen dem Index α eines Γ-stabilen Maßes μ und dem Spektrum des Generators $(A,D(A))$ von Γ näher beleuchtet werden.

In II.1 hatten wir gesehen, daß für endlich-dimensionales E Gauß- und Poisson-Anteil von μ auf komplementäre Γ-invariante Teilräume konzentriert sind. Das Spektrum von A zerfällt dabei in einfache Eigenwerte mit Realteil $\alpha/2$ (Gauß-Anteil) und in Eigenwerte, deren Realteil größer ist als $\alpha/2$ (Poisson-Anteil). Da aber zum Beweis mehrfach die Endlichdimensionalität des Grundraums benutzt wurde (Bijektivität des Kovarianz-Operators, Integrabilitätseigenschaften von Lévy-Maßen, $\sigma(A) = P\sigma(A)$), können analoge Resultate in dieser Allgemeinheit nicht erwartet werden.

Für Γ-stabile Maße mit nicht-verschwindendem Gauß-Anteil ergibt sich jedoch

2.1 Satz

Sei $\mu = [x,R,M]$ Γ-stabil mit Index α und $R \neq 0$.

Dann gilt

$$2\omega_o^- \leq \alpha \leq 2\omega_o^+.$$

Beweis: Durch Normabschätzung erhalten wir aus $T_t R T_t' = t^\alpha R$

$$\alpha \leq 2 \log(\|T_t\|)/\log t \quad , \text{ falls } t > 1$$
$$\alpha \geq 2 \log(\|T_t\|)/\log t \quad , \text{ falls } t \in (0,1).$$

Mit I.4.1 folgt nun die Behauptung.

Unter Verwendung von I.4.1(v) ergibt sich

2.2 Korollar

Ist in der Situation von 2.1 Γ sogar normstetig, so folgt

$$2 \inf\{\mathrm{Re}\ \lambda\colon \lambda \in \sigma(A)\} \leq \alpha \leq 2 \sup\{\mathrm{Re}\ \lambda\colon \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Wir stellen nun das Lévy-Maß in den Vordergrund unserer Überlegungen. Genauer sollen aufgrund von Integrabilitätsbedingungen Aussagen über den Index α gewonnen werden. Wegen I.2.3(iii) müssen wir uns dabei auf Banachräume vom Kotyp q beschränken.

2.3 Satz

Es seien E ein Banachraum vom Kotyp q sowie $\mu = [x,R,M]$ Γ-stabil mit Index α und $M \neq 0$.

Dann gilt für jedes $t > 1$

$$\alpha < q \frac{\log \|T_t\|}{\log t};$$

also insbesondere $\alpha \leq q\omega_0^+$.

Beweis: Zunächst folgt aus I.2.3(iii) die Endlichkeit des Integrals $I := \int_U \|x\|^q M(dx)$.

Nun wählen wir $s_0 > 0$ mit $\{T_s y\colon y \in L,\ s \in (0,s_0]\} \subset U$.

Für festes $t > 1$ ergeben sich folgende Abschätzungen

$$I \geq \sum_{n \geq 0} \int_{\{T_s y\colon y \in L,\ s_0 t^{-n-1} < s \leq s_0 t^{-n}\}} \|x\|^q M(dx)$$

$$\geq \sum_{n\geq o} \Big[\inf\{\|T_s y\|^q : y \in L,\ s_o t^{-n-1} < s \leq s_o t^{-n}\}$$

$$\cdot T_{t^n}(M)(\{T_s y : y \in L,\ s_o t^{-1} < s \leq s_o\})\Big]$$

$$\geq \inf\{\|T_s\|^{-q} : s_o^{-1} \leq s < t s_o^{-1}\}$$

$$\cdot M(\{T_s y : y \in L,\ s_o t^{-1} < s \leq s_o\}) \sum_{n\geq o} (t^{\alpha}\|T_t\|^{-q})^n.$$

Die Behauptung folgt nun aus der Konvergenz dieser Reihe.

2.4 Bemerkungen

(1) Für normstetige Gruppen ergibt sich in 2.3 mit I.4.1(v) die Bedingung $\alpha \leq q \sup\{\mathrm{Re}\ \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$.

(2) Liegt in 2.3 eine Gruppe normaloider Operatoren vor, so gilt wegen $\|T_t\| = r(T_t) = t^{\omega_o^+}$ $(t>1)$ die stärkere Aussage $\alpha < q\omega_o^+$. Dabei heißt ein Operator $S \in \mathcal{L}(E)$ normaloid, falls gilt $\|S\| = r(S)$. Insbesondere sind normale Operatoren auf Hilberträumen normaloid.

(3) Beispiel 1.6 zeigt, daß in 2.3 im allgemeinen keine bessere Abschätzung für α möglich ist. Für 1.6 liefert 2.3 wegen $q = 2$ und $\omega_o^+ = 2$ $\alpha < 4$. Wählen wir in 1.6 $b = 2$, so existiert zu jedem $\alpha < 4$ durch passende Wahl von a ein Γ-stabiles Maß mit Index α.

(4) Für die spezielle Gruppe $\Gamma = (tI)_{t>o}$ liefern 2.1 und 2.3 das bekannte Resultat, daß ein Γ-stabiles Maß entweder ein reines Gauß-Maß ist ($\alpha=2$), oder aber keinen Gauß-Anteil besitzt ($\alpha \in (0,2)$).

Wie die bisher bewiesenen Sätze zeigen, sind wir von einer Einteilung von $\sigma(A)$ nach Gauß- bzw. Poisson-Komponente

von μ weit entfernt. Deshalb lenken wir unser Augenmerk auf speziellere Situationen.

Dazu führen wir den Begriff des vollen Maßes ein.

2.5 Definition

Ein Maß $\nu \in \mathcal{M}^1(E)$ heißt voll, wenn der Träger $S(\nu)$ von ν nicht in einer Hyperebene von E enthalten ist.

Für die Fourier-Transformierte hat diese Eigenschaft folgende Konsequenz

2.6 Lemma

Sei ν ein volles Maß auf $(E,\mathcal{B}(E))$.

Dann enthält die Menge $\{x \in E': |\hat{\nu}(x')| = 1\}$ keinen nichttrivialen Teilraum von E'.

Beweis: Es sei $\{0\} \neq F$ ein linearer Teilraum von E' mit $F \subset [|\hat{\nu}| = 1]$. Für das symmetrisierte Maß $\nu^o := \nu * \overline{\nu}$ gelten folgende Implikationen

$$\nu^o(x') = \int e^{i<x',x>}\, \nu^o(dx) = 1 \qquad (x' \in F)$$

$$\Rightarrow \quad \nu^o(\{x \in E: e^{i<x',x>} = 1\}) = 1 \qquad (x' \in F)$$

$$\Rightarrow \quad S(\nu^o) \subset \{x \in E: <x',x> = 0 \bmod 2\pi \ \forall x' \in F\}$$

$$\Rightarrow \quad S(\nu^o) \subset \{x \in E: <x',x> = 0 \ \ \forall x' \in F\} = F^o.$$

Wegen $S(\nu^o) = \overline{S(\nu) - S(\nu)}$ ergibt sich ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Umgekehrt kann man zeigen, daß der Träger eines Maßes nicht in einer abgeschlossenen Hyperebene enthalten ist,

sofern die in 2.6 angegebene Bedingung erfüllt ist.

Für volle Gauß-Maße läßt sich nun 2.1 verschärfen

2.7 Satz

Es seien $\mu = [x,R,0]$ ein volles, Γ-stabiles Maß mit Index α und $R\sigma(A) \neq \emptyset$.

Dann gelten für α die folgenden Abschätzungen:

(i) $\sup\{\mathrm{Re}\ \lambda: \lambda \in R\sigma(A)\} + \inf\{\mathrm{Re}\ \lambda: \lambda \in P\sigma(A)\} \leq \alpha$.

(ii) $\alpha \leq \inf\{\mathrm{Re}\ \lambda: \lambda \in R\sigma(A)\} + \sup\{\mathrm{Re}\ \lambda: \lambda \in P\sigma(A)\}$.

Beweis: Für $\lambda \in R\sigma(A)$ folgt mit I.4.8(iii) und I.4.8(iv) $t^{\lambda} \in P\sigma(T_t^*)$ für jedes $t > 0$. Da μ nach Voraussetzung voll ist, impliziert 2.6 die Injektivität von R. Mit 1.2 ergibt sich nun $t^{\alpha-\lambda} \in P\sigma(T_t^*)$ $(t>0)$. Zu $t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ existiert nach I.4.1(vii) ein $n_t \in \mathbb{Z}$ mit $(\alpha - \lambda + 2\pi i n_t/\log t) \in P\sigma(A)$.

Hieraus ist die Behauptung ersichtlich.

2.8 Korollar

Es liege die Situation von 2.7 vor. Außerdem seien E ein separabler Hilbertraum, Γ normstetig mit normalem Generator A und schließlich $P\sigma(A) \neq \emptyset$.

Dann gilt

$$\alpha = \inf\{\mathrm{Re}\ \lambda: \lambda \in P\sigma(A)\} + \sup\{\mathrm{Re}\ \lambda: \lambda \in P\sigma(A)\}.$$

Beweis: Aus der Normalität von A folgt $\ker(\lambda I - A) = \ker(\bar{\lambda} I - A') = [(\lambda I - A)(E)]^{\circ}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$. Also hat man $\lambda \in P\sigma(A) \Leftrightarrow \overline{(\lambda I - A)(E)} \neq E$, das heißt $P\sigma(A) = R\sigma(A)$.

2.7 liefert nun die Behauptung.

Zwei weitere Spezialfälle behandeln wir in den folgenden

2.9 Bemerkungen

(1) Wir gehen von der speziellen Situation in 2.8 aus. Durch Differentiation von $T_t R T_t' = t^\alpha R$ $(t>0)$ im Punkte $t = 1$ ergibt sich $AR + RA' = \alpha R$, also $(A - \frac{\alpha}{2}I)R + R(A' - \frac{\alpha}{2}I) = 0$. Da in unendlich-dimensionalen Räumen der Kovarianz-Operator R nicht bijektiv sein kann, ist es nicht möglich, ohne weitere Voraussetzungen die Schiefsymmetrie des Operators $A - \frac{\alpha}{2}I$ zu beweisen.

Falls jedoch R mit A kommutiert, kann dies wegen der Injektivität von R geschehen. Für $\lambda \in \sigma(A)$ gilt dann stets $\operatorname{Re} \lambda = \frac{\alpha}{2}$.

(2) Wir greifen noch die Frage auf, wann ein Γ-stabiles Maß nur eine Gauß- oder nur eine Poisson-Komponente besitzen kann. Eine erste Antwort gab 2.4(4) für die Gruppe $(tI)_{t>0}$.

In Verallgemeinerung dessen kann für stark-stetige Gruppen Γ auf Hilberträumen mit $\omega_0^- = \omega_0^+$ aus den vorangehenden Sätzen folgendes abgeleitet werden:

Es existiere ein $t_0 \neq 1$ mit $\|T_{t_0}\| = t_0^{\omega_0^+}$. Dann besitzt jedes Γ-stabile Maß mit Index α entweder nur eine Gauß- $(\alpha=2\omega_0^+)$ oder nur eine Poisson-Komponente $(\alpha<2\omega_0^+)$.

Beispiele hierfür sind Gruppen der Form $(tS_t)_{t>0}$. Dabei sei $(S_t)_{t>0}$ eine Gruppe von Isometrien. Solche Gruppen wurden von R. Jajte in [13] betrachtet.

Wir geben hierzu ein konkretes Beispiel: Bezeichne E den reellen Hilbertraum $L^2(\mathbb{R},\mathfrak{L}(\mathbb{R}),\lambda)$ und sei S_t gegeben durch

$$(S_t f)(x) := f(x + \log t) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Dadurch wird eine stark-stetige Gruppe $(S_t)_{t>0}$ von Isometrien auf E definiert.

Der Generator $\tilde{A}$ dieser Gruppe ist auf dem dichten Teilraum $D(\tilde{A})$ der absolutstetigen Funktionen, deren Ableitung in E liegt, definiert. Für $g \in D(\tilde{A})$ gilt $\tilde{A}g = g'$. Für das Spektrum von $\tilde{A}$ gilt $\{\mathrm{Re}\ \lambda\colon \lambda \in \sigma(\tilde{A})\} \subset \{0\}$.

Für die Gruppe $(tS_t)_{t>0}$ folgt $\omega_o^- = \omega_o^+ = 1$. Die Anwendbarkeit der obigen Bemerkung auf dieses Beispiel ist damit gesichert.

Man vergleiche hierzu auch ([5], XXII.5).

3. Der normale Anziehungsbereich Γ-stabiler Maße

Von nun an schränken wir die Klasse der zugelassenen Gruppen Γ weiter ein. Da die Anwendbarkeit von I.4.6(ii) sichergestellt werden muß, erfülle Γ stets die Bedingung

$$\lim_{t\to o} \|T_t\| = 0.$$

Aus I.4.1 folgt dann $\omega_o^- > 0$, $\lim_{t\to o} \|T_t x\| = 0$ sowie $\|T_t x\| \longrightarrow \infty \quad (t\longrightarrow\infty,\ x \in E \setminus \{0\})$.

Weiterhin bezeichne $[B;s]$ stets die Menge $\{T_t x\colon x \in B, t > s\}$ $(B \in \mathcal{B}(L),\ s>0)$.

In Anlehnung an II.2.1 geben wir folgende

3.1 Definition

Ein Maß $\nu \in \mathcal{M}^1(E)$ gehört zum normalen Anziehungsbereich $N(\mu)$ eines Γ-stabilen Maßes μ mit Index α, falls es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E gibt derart, daß gilt

$$\lim_{n\to\infty} T_{n^{-1/\alpha}}(\nu^n) * \varepsilon_{x_n} = \mu.$$

Natürlich gehört μ zu seinem eigenen Anziehungsbereich, das heißt $\mu \in N(\mu)$. Dieser ist jedoch nicht mehr im Sinne der Bemerkung nach II.2.1 unabhängig von Γ. Denn die Halbgruppe $\{T \in \mathcal{L}(E)\colon T(\mu) = \mu\}$ ist im allgemeinen nicht relativ kompakt, wie etwa Beispiel 3 in [16] zeigt.

Dies wird sich besonders nachteilig auf die Untersuchung normaler Anziehungsbereiche Gaußscher Maße auswirken, da für diesen Fall bisher stets die spezielle Gruppe $(tI)_{t>o}$ gewählt werden konnte.

Im folgenden seien $\mu = [x,R,M]$ stets ein nicht-entartetes, Γ-stabiles Maß mit Index α sowie γ das in 1.3 definierte Maß auf L.

Wir beschäftigen uns zunächst mit notwendigen Bedingungen, denen ein Maß $\nu \in N(\mu)$ genügen muß.

3.2 Satz

Sei $\nu \in N(\mu)$. Dann gilt für jede M-randlose Menge der Gestalt $\{T_t x: x \in B, t > 1\}$ $(B \in \mathfrak{B}(L))$

$$\lim_{s\to\infty} s^{\alpha}\nu(\{T_t x: x \in B, t > s\}) = \alpha^{-1}\gamma(B).$$

Beweis: Es bezeichne μ_n das Maß $T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)$ $(n \in \mathbb{N})$. Somit gilt $\mu_n(\{x \in E: \|x\| \geq \varepsilon\}) \leq \nu(\{x \in E: \|x\| \geq \varepsilon\|T_{n^{-1/\alpha}}\|^{-1}\})$. Deshalb erhalten wir mit $(\mu_{nj})_{j=1,\ldots,n;n\in\mathbb{N}}$ $(\mu_{nj} := \mu_n$ für $j=1,\ldots,n)$ ein infinitesimales Dreieckssystem. Auf dieses wenden wir I.3.1 an.

Also gilt für jedes $\delta > 0$ mit $M(\partial U_\delta) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\mu_n|_{U_\delta^c}\right] = M|_{U_\delta^c}.$$

Seien nun die Menge $[B;1]$ M-randlos sowie $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_+$ mit $s_k \to \infty$ $(k\to\infty)$.

Da nach I.4.6(i) $[B;1]$ von Null positiven Abstand besitzt, folgt

$$\lim_{n\to\infty} n\mu_n([B;1]) = M([B;1]) = \alpha^{-1}\gamma(B). \qquad (*)$$

Wir wählen nun eine Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $n_k \leq s_k < n_k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$. Dann gilt

$$\frac{n_k}{n_k+1}(n_k+1)\nu([B;(n_k+1)^{1/\alpha}]) \leq s_k\nu([B;s_k^{1/\alpha}])$$

$$\leq \frac{n_k+1}{n_k}\, n_k\nu([B;n_k^{1/\alpha}]) \qquad (k\in\mathbb{N})$$

und wegen $T_r([B;s]) = [B;rs]$ $(r,s > 0)$

$$\frac{n_k}{n_k+1}(n_k+1)\mu_{n_k+1}([B;1]) \leq s_k\nu([B;s_k^{1/\alpha}])$$

$$\leq \frac{n_k+1}{n_k}\, n_k\mu_{n_k}([B;1]) \qquad (k\in\mathbb{N}).$$

Mit (*) ergibt sich nun $\lim\limits_{k\to\infty} s_k\nu([B;s_k^{1/\alpha}]) = \alpha^{-1}\gamma(B)$, also die Behauptung.

3.3 Korollar

Gilt in der Situation von 3.2 außerdem $\gamma(B) \neq 0$, so folgt für $r > 0$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\nu(\{T_t x\colon x\in B,\ t > s\})}{\nu(\{T_t x\colon x\in B,\ t > rs\})} = r^{\alpha}.$$

Insbesondere ist die Funktion $s \mapsto s^{\alpha}\nu(\{T_t x\colon x\in B,\ t > s\})$ $(s>0)$ von langsamer Variation ([4], Definition 2.6.1).

3.4 Korollar

Für M-randlose Mengen $[A;1]$, $[B;1]$ $(A,B\in\mathcal{B}(L))$ mit $\gamma(B) \neq 0$ gilt unter den Voraussetzungen von 3.2

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\nu(\{T_t x\colon x\in A,\ t > s\})}{\nu(\{T_t x\colon x\in B,\ t > s\})} = \frac{\gamma(A)}{\gamma(B)}.$$

3.5 Bemerkungen

(1) Für den Fall, daß die Abbildung Φ ein Homöomorphismus ist, können obige Resultate für γ-randlose Mengen $B \in \mathcal{B}(L)$ anstelle M-randloser Mengen $[B;1]$ formuliert werden.

Dies ist nach I.4.3 genau dann möglich, wenn der Γ-Querschnitt (L,Φ) abgeschlossen ist.

(2) Die Aussage von 3.2 ist insbesondere für Gauß-Maße richtig. Sie gilt dann wegen $\gamma = M = 0$ sogar für alle Mengen der Gestalt $[B;1]$ $(B \in \mathcal{B}(L))$.

(3) Für $\Gamma = (tI)_{t>0}$ ergeben sich genau die in [3] zu diesem Themenkreis bewiesenen Aussagen.

Weitere notwendige Bedingungen für $\nu \in N(\mu)$ enthält der nächste Satz. Sie sind deshalb wichtig, weil sie unter zusätzlichen Voraussetzungen an E und Γ auch hinreichend sind.

3.6 Satz

Ist $\nu \in N(\mu)$, so gelten folgende Aussagen:

(i) Für jedes $T \in \mathcal{L}(E)$ von endlichem Rang gilt

$$\lim_{n\to\infty} (T \circ T_{n^{-1/\alpha}})(\nu^n) * \varepsilon_{Tx_n} = T(\mu).$$

(ii) Für alle $\delta > 0$ ist

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} n\nu(\{T_t x: x \in L,\ t > \delta n^{1/\alpha}\}) < \infty.$$

(iii) Für jede aufsteigende Folge $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ endlich-dimensionaler Teilräume F_k von E mit $\overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k} = E$ und für jedes $t > 0$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n}}\ n \cdot T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(\{x \in E: d(x,F_k) > t\}) = 0.$$

Beweis: Aussage (i) ist offensichtlich; (ii) folgt wegen $n\nu([L;\delta n^{1/\alpha}]) = n \cdot T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)([L;\delta])$ aus I.4.6(i) und I.3.1(i).

Kommen wir zu (iii): Für festes $t > 0$ sind die Mengen $[d(\cdot,F_k) \geq t]$ abgeschlossen ($k \in \mathbb{N}$). Außerdem besitzen sie positiven Abstand von Null gleichmäßig für alle $k \in \mathbb{N}$. Deshalb folgt aus I.3.1(i)

$$\overline{\lim_n}\, n \cdot T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(\{x \in E: d(x,F_k) > t\}) \leq M(\{x \in E: d(x,F_k) \geq t\})$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Aus $[d(\cdot,F_k) \geq t] \downarrow \emptyset$ $(k \to \infty)$ und der Endlichkeit von M auf Komplementen von Nullumgebungen folgt nun die Behauptung.

Falls in (i) T mit allen T_t kommutiert, so liegt $T(\nu)$ im normalen Anziehungsbereich von $T(\mu)$.

Wie bereits angedeutet, besteht die nun vor uns liegende Aufgabe darin, eine Umkehrung von 3.6 zu beweisen. Dies wird für Banachräume vom Typ p und für Γ-stabile Maße mit Index $\alpha < p\omega_o^-$ möglich sein.

Gesucht sind also hinreichende Bedingungen für die Konvergenz der Folge $(T_{n^{-1/\alpha}}(\nu^n) * \varepsilon_{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ $(\nu \in \mathcal{M}^1(E), x_n \in E$ $(n \in \mathbb{N}))$ gegen μ.

In der klassischen Situation $E = \mathbb{R}$ steht hierzu ein Satz von Gnedenko zur Verfügung. Darin wird diese Konvergenz durch die der sogenannten begleitenden Verteilungen charakterisiert; diese sind zusammengesetzte Poisson-Verteilungen.

Für Banachräume bewies Le Cam, daß die relative Translations-Kompaktheit der begleitenden Verteilungen, die in

unserem Fall durch $e(n \cdot T_{n^{-1/\alpha}}(\nu))$ $(n \in \mathbb{N})$ gegeben sind, die relative Translations-Kompaktheit der Folge $(T_{n^{-1/\alpha}}(\nu^n))_{n \in \mathbb{N}}$ impliziert. Die Umkehrung ist für beliebige Dreiecks-Familien im allgemeinen falsch, kann jedoch im Falle identisch verteilter Zeilen bewiesen werden.

Wir benötigen Lemma 4.1 aus [3]. Wir formulieren es für die hier vorliegende Ausgangssituation.

3.7

Die Folge $(e(n \cdot T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)))_{n \in \mathbb{N}}$ sei relativ kompakt. Man definiere

$$x_n := n \int \frac{\min(1, \|x\|)}{\|x\|} \, x \, T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(dx).$$

Dann ist die Folge $(T_{n^{-1/\alpha}}(\nu^n) * \varepsilon_{-x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ relativ kompakt.

Über Bedingungen für die relative Kompaktheit der Folge $(e(n \cdot T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)))_{n \in \mathbb{N}}$ gibt ein weiteres Resultat von A. Araujo und E. Giné ([3], Lemma 4.2) Auskunft, auf das wir uns beim Beweis des nun folgenden Theorems stützen werden.

3.8 Theorem

Es seien E ein Banachraum vom Typ p und μ ein nicht-entartetes, Γ-stabiles Maß mit Index α. Für das Maß $\nu \in \mathcal{M}^1(E)$ gelte:

(i) Zu jeder Abbildung $T \in \mathcal{L}(E)$ von endlichem Rang gibt es eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E derart, daß

$$\lim_{n \to \infty} (T \circ T_{n^{-1/\alpha}})(\nu^n) * \varepsilon_{y_n} = T(\mu).$$

(ii) Für jedes $c > 0$ gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} n\nu(\{T_t x: x \in L, t > cn^{1/\alpha}\}) < \infty.$$

(iii) Es existiert eine aufsteigende Folge $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ endlich-dimensionaler Teilräume F_k von E mit $\overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k} = E$, so daß für jedes $t > 0$ gilt

$$\lim_{k \to \infty} \overline{\lim_n} \; n \cdot T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(\{x \in E: d(x,F_k) > t\}) = 0.$$

(iv) Für $x' \in E'$ gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} n \int_U \langle x', x \rangle^2 \, T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(dx) < \infty.$$

(v) Es existiert eine aufsteigende Folge $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ endlich-dimensionaler Teilräume G_k von E mit

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} n \int_U d(x,G_k)^p \, T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(dx) = 0.$$

Dann liegt ν im normalen Anziehungsbereich von μ.

Beweis: Den umfangreichen Beweis führen wir in mehreren Schritten, die wir vorab kurz beschreiben wollen.

Mit μ_n werde das Maß $n \cdot T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)$ bezeichnet ($n \in \mathbb{N}$).

Zunächst zeigen wir die relative Kompaktheit der Folgen $(\mu_n|U_\delta^c)_{n \in \mathbb{N}}$ ($\delta > 0$). Diese ergibt sich aus (i)-(iii). Daraus folgt mit (iv) und (v), daß die begleitenden Verteilungen $(e(\mu_n))_{n \in \mathbb{N}}$ relativ kompakt sind. 3.7 liefert nun die relative Kompaktheit von $(T_{n^{-1/\alpha}}(\nu^n) * \varepsilon_{-x_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Aus der

Konvergenz der Folgen $(\mu_n|_{U_\delta^c})_{n\in\mathbb{N}}$, die sich aus (i) ableiten läßt, kann schließlich die Behauptung gefolgert werden.

Kommen wir zur Ausführung im Detail:

1. Für festes $\delta > 0$ betrachten wir die Maße $\mu_n|_{U_\delta^c}$ $(n\in\mathbb{N})$. Aus (ii) folgt zunächst

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n|_{U_\delta^c}([L;c]) < \infty \qquad \text{für jedes } c > 0.$$

Mit I.4.6(ii) erhalten wir daraus die Norm-Beschränktheit der Folge $(\mu_n|_{U_\delta^c})$.

Beachtet man, daß in (iii) "$\overline{\lim}_n$" durch "$\sup_{n\in\mathbb{N}}$" ersetzt werden kann, so ergibt sich folgende Eigenschaft: Zu $\varepsilon,\varepsilon' > 0$ existiert ein endlich-dimensionaler Teilraum F von E, so daß für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$\mu_n|_{U_\delta^c}([d(\cdot,F) > \varepsilon]) < \varepsilon'.$$

Für jede Folge $(x'(\mu_n|_{U_\delta^c}))_{n\in\mathbb{N}}$ $(x'\in E')$ läßt sich aus (i) und dem auf $\mathbb{R}$ spezialisierten Grenzwertsatz I.3.1 die gleichmäßige Straffheit herleiten.

Diese drei Überlegungen liefern mit I.3.2 die relative Kompaktheit der Folge $(\mu_n|_{U_\delta^c})_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Wir wenden nun Lemma 4.2 in [3] auf die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an. Wegen 1., (iv) und (v) sind alle Voraussetzungen erfüllt. Es folgt also die relative Kompaktheit der begleitenden Verteilungen $(e(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Schließlich liefert 3.7, daß auch die Folge $(T_{n^{-1/\alpha}}(\nu^n) * \varepsilon_{-x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in 3.7) relativ

kompakt ist.

3. Wir zeigen die Konvergenz der Folgen $(\mu_n|U_\delta^c)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\delta>0)$. Dazu seien ρ^δ, σ^δ zwei Häufungspunkte der entsprechenden Folge. Dann existieren σ-endliche Maße ρ, σ mit folgenden Eigenschaften: $\rho(\{0\}) = \sigma(\{0\}) = 0$, $\rho^\delta = \rho|U_\delta^c$ und $\sigma^\delta = \sigma|U_\delta^c$.

Sei $(\delta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine gegen Null fallende Folge in $\mathbb{R}_+$. Durch sukzessiven Übergang zu Teilfolgen erhält man Folgen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(m_l)_{l\in\mathbb{N}}$ derart, daß

$$\lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}|U_{\delta_j}^c = \rho^{\delta_j} \quad \text{und} \quad \lim_{l\to\infty} \mu_{m_l}|U_{\delta_j}^c = \sigma^{\delta_j} \qquad (j\in\mathbb{N}).$$

Wäre nun $\rho \neq \sigma$, so gäbe es eine Abbildung $T\in\mathcal{L}(E)$ von endlichem Rang mit $T(\rho) \neq T(\sigma)$. Dies folgt aus der Tatsache, daß die Zylindermengen mit positivem Abstand von Null den σ-Ring der nicht die Null enthaltenden Borelmengen erzeugen ([3], Lemma 3.2). Zusammen mit I.3.1 würde sich ein Widerspruch zu (i) ergeben.

4. Wir betrachten die endlich-dimensionalen Randverteilungen der nach 2. relativ kompakten Folge $(T_{n^{-1/\alpha}}(\nu^n) * \varepsilon_{-x_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Dabei sei

$$x_n = \int \frac{\min(1,\|x\|)}{\|x\|}\, x\ \mu_n(dx).$$

Für $T\in\mathcal{L}(E)$ mit endlichem Rang nehmen wir folgende Aufspaltung vor:

$$T(T_{n^{-1/\alpha}}(\nu^n) * \varepsilon_{-x_n}) = ((T\circ T_{n^{-1/\alpha}})(\nu^n) * \varepsilon_{y_n})$$

$$* \varepsilon_{-(E(T(S_{n,\delta})+y_n))} * \varepsilon_{E(T(S_{n,\delta})-a_n(T))} * \varepsilon_{a_n(T)-T(x_n)}.$$

Dabei seien $\delta \in (0, \|T\|^{-1})$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vermöge (i) zu T gewählt und

$$a_n(T) := \int \frac{\min(1, \|T(x)\|)}{\|T(x)\|} \, T(x) \, \mu_n(dx) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Wir zeigen die Konvergenz der einzelnen Faktoren: Die Konvergenz der Faktoren 1 und 2 gegen $T(\mu)$ bzw. ε_{z_T} für ein $z_T \in E$ ergibt sich sofort aus (i) und I.3.1.

Zu den Faktoren 3 und 4 sei folgendes bemerkt: Man hat

$$E(T(S_{n,\delta}) - a_n(T)) = \int_{U_\delta} T(x) \, \mu_n(dx) - \int \frac{\min(1, \|T(x)\|)}{\|T(x)\|} \, T(x) \, \mu_n(dx)$$

$$= - \int \left[\frac{\min(1, \|T(x)\|)}{\|T(x)\|} - \frac{\min(1, \|x\|)}{\|x\|} \right] T(x) \, \mu_n \big|_{U_\delta^c}(dx)$$

und

$$a_n(T) - T(x_n) = \int \left[\frac{\min(1, \|T(x)\|)}{\|T(x)\|} - \frac{\min(1, \|x\|)}{\|x\|} \right] T(x) \, \mu_n(dx)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Die Integranden sind stetige, beschränkte Abbildungen. Letztere verschwinden innerhalb einer Nullumgebung.

Da T endlichen Rang besitzt, folgt mit Beweisteil 3 die Konvergenz dieser Folgen in E. Somit ergibt sich die Behauptung.

5. Fassen wir zusammen: Die endlich-dimensionalen Randverteilungen der relativ kompakten Folge $(T_{n^{-1/\alpha}}(\nu^n) * \varepsilon_{-x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren gegen Translate der jeweiligen Projektionen von μ. Mit dem Argument der erzeugenden Zylindermengen aus 3. folgt daher, daß die Folge selbst gegen ein Maß $\mu' \in \mathcal{M}^1(E)$

konvergieren muß.

Bleibt zu zeigen: Es existiert ein $x \in E$ mit $\mu' = \mu * \varepsilon_x$.

Da es zu jedem $T \in \mathcal{L}(E)$ von endlichem Rang ein $x_T \in E$ gibt mit $T(\mu') = T(\mu) * \varepsilon_{x_T}$, wird durch $\langle x,x' \rangle := i \cdot \log \hat{\mu}'(x') - i \cdot \log \hat{\mu}(x')$ eine lineare Abbildung von E' in $\mathbb{R}$ definiert. Also gilt $x \in E'^*$.

Da aber $\hat{\mu}'$ und $\hat{\mu}$ stetig sind für die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von E, ist auch die oben definierte Abbildung stetig für diese Topologie. Daraus folgt jedoch $x \in E$, also $\mu' = \mu * \varepsilon_x$.

Damit ist dieses Theorem vollständig bewiesen.

3.9 Korollar

Sind in der Situation von 3.8 die Maße μ und ν symmetrisch, so kann Bedingung (i) abgeschwächt werden zu

(i)' Für jedes $x' \in E'$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} (x' \circ T_{n^{-1/\alpha}})(\nu^n) = x'(\mu).$$

Beweis: Wie im Beweis zu 3.8 erhält man die relative Translations-Kompaktheit der Folge $(T_{n^{-1/\alpha}}(\nu^n))_{n \in \mathbb{N}}$. Diese ist wegen der Symmetrie von ν selbst relativ kompakt. Also muß sie wegen (i)' gegen μ konvergieren.

Theorem 3.8 bringt uns unserem Ziel, eine Umkehrung von 3.6 zu beweisen, wesentlich näher.

Es wird sich zeigen, daß für $\alpha < p\omega_o^-$ die Bedingungen (iv)

und (v) aus (i)-(iii) abgeleitet werden können. Maßgebliche Bedeutung kommt dabei Bedingung 3.8(ii) zu. Aus dieser folgt zunächst

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} n\cdot T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(\{T_s x\colon x\in L,\ s>c\})<\infty$$

für jedes $c>0$. Mit I.4.6(ii) ergibt sich folgendes:

Für alle $t>0$ gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} n\cdot T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(\{x\in E\colon \|x\|\geq t\})<\infty.$$

Eine genauere Abschätzung zeigt das folgende technische Lemma auf.

3.10 Lemma

Sei μ Γ-stabil mit Index α. Weiterhin besitze $\nu\in\mathcal{M}^1(E)$ die Eigenschaft $\sup_{n\in\mathbb{N}} n\nu(\{T_s x\colon x\in L,\ s>cn^{1/\alpha}\})<\infty$ für jedes $c>0$.

Dann existiert zu $\omega>\omega_0^+$ und $\omega'\in(0,\omega_0^-)$ eine Konstante $K>0$, so daß für alle $t>0$ gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} n\cdot T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(\{x\in E\colon \|x\|\geq t\})\leq K(t^{-\alpha/\omega'}+t^{-\alpha/\omega}).$$

Beweis: Zu $\omega>\omega_0^+$ und $\omega'\in(0,\omega_0^-)$ wählen wir M_ω bzw. $M_{\omega'}$ gemäß I.4.1(ii). Setzen wir in I.4.6(ii) $r=n^{1/\alpha}$, so folgt

$$\begin{aligned}
&n\cdot T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(\{x\in E\colon \|x\|\geq t\})\\
&\leq n\nu(\{T_s y\colon y\in L,\ s\geq (t/M_{\omega'})^{1/\omega'}n^{1/\alpha}\})\\
&\qquad + n\nu(\{T_s y\colon y\in L,\ s\geq (t/M_\omega)^{1/\omega}n^{1/\alpha}\})\\
&= (t/M_{\omega'})^{-\alpha/\omega'}\, n(t/M_{\omega'})^{\alpha/\omega'}\nu([L;(t/M_{\omega'})^{1/\omega'}n^{1/\alpha}])\\
&\qquad + (t/M_\omega)^{-\alpha/\omega}\, n(t/M_\omega)^{\alpha/\omega}\nu([L;(t/M_\omega)^{1/\omega}n^{1/\alpha}]).
\end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus folgender Eigenschaft von ν:

$$\sup_{s>0} s^{\alpha}\nu([L;s]) < \infty.$$

Wäre dies nicht richtig, so gäbe es eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_+$ mit $s_n \to \infty$ und $s_n^{\alpha}\nu([L;s_n]) \to \infty$ $(n\to\infty)$. Für die Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ mit $k_n < s_n < k_n+1$ gilt aber

$$s_n^{\alpha}\nu([L;s_n]) < \left[\frac{k_n+1}{k_n}\right]^{\alpha} k_n^{\alpha}\nu([L;k_n]).$$

Hieraus würde sich ein Widerspruch zur Voraussetzung ergeben.

Damit können wir nun die folgende Charakterisierung normaler Anziehungsbereiche Γ-stabiler Maße beweisen.

3.11 Theorem

Es seien E ein Banachraum vom Typ p, μ ein nicht-entartetes, Γ-stabiles Maß mit Index $\alpha < p\omega_0^-$ sowie $\nu\in\mathcal{M}^1(E)$.

ν liegt genau dann im normalen Anziehungsbereich von μ, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(i) Zu jeder Abbildung $T\in\mathcal{L}(E)$ von endlichem Rang existiert eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E, so daß gilt

$$\lim_{n\to\infty} (T\circ T_{n^{-1/\alpha}})(\nu^n) * \varepsilon_{y_n} = T(\mu).$$

(ii) Für jedes $c > 0$ gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} n\nu(\{T_t x: x\in L,\ t > cn^{1/\alpha}\}) < \infty.$$

(iii) Es existiert eine aufsteigende Folge $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$

endlich-dimensionaler Teilräume F_k von E mit $\overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k} = E$, so daß für jedes $t > 0$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n}} \; n \cdot T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(\{x \in E: d(x,F_k) > t\}) = 0.$$

Beweis: Es ist nur zu zeigen, daß (i)-(iii) die Bedingungen (iv) und (v) von 3.8 implizieren.

Sei wiederum $\mu_n := n \cdot T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Wir beweisen zunächst Bedingung 3.8(iv). Diese ergibt sich aus (ii). Es gilt für $x' \in E'$

$$\int_U \langle x', x\rangle^2 \, \mu_n(dx) \leq \int_{-\|x'\|}^{\|x'\|} t^2 \, x'(\mu_n)(dt).$$

Es genügt, die Terme

$$A_n := \int_0^{\|x'\|} t^2 \, x'(\mu_n)(dt) \qquad \text{zu betrachten.}$$

Für diese gilt die Abschätzung

$$A_n = 2 \int_{t=0}^{\|x'\|} \int_{s=0}^{t} s \, ds \, x'(\mu_n)(dt)$$

$$= 2 \int_0^{\|x'\|} s \, x'(\mu_n)([s,\|x'\|]) \, ds$$

$$\leq 2\|x'\| \int_0^1 s \, \mu_n(\{x \in E: \|x\| \geq s\}) \, ds.$$

Wegen $\alpha < p\omega_o^-$ existiert ein $\omega' \in (0,\omega_o^-)$ mit $\alpha/p < \omega'$. Mit diesem ω' und einem $\omega > \omega_o^+$ wenden wir 3.10 auf obigen Integranden an. Also hat man

$$A_n \leq 2\|x'\|K \int_0^1 (s^{1-\alpha/\omega'} + s^{1-\alpha/\omega})\, ds \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Nach Wahl der Parameter ist dieses Integral endlich. Es folgt also $\sup_{n \in \mathbb{N}} A_n < \infty$, das heißt 3.8(iv).

Mit Hilfe ähnlicher Umformungen zeigen wir nun die Gültigkeit von 3.8(v). Sei dazu $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge endlich-dimensionaler Teilräume von E, die (iii) genügt.

Dann gilt

$$B_n^{(m)} := \int_U d(x,F_m)^p \, \mu_n(dx) \leq \int_0^1 t^p \, d(\cdot,F_m)(\mu_n)(dt)$$

$$\leq p \int_0^1 t^{p-1} \, \mu_n(\{x \in E: d(x,F_m) \geq t\})\, dt \qquad (n,m \in \mathbb{N}).$$

Sei nun $t_o \in (0,1)$ fest gewählt. Nach Aufspaltung des Integrals schätzen wir mit denselben Parametern ω, ω' wie oben vermöge 3.10 ab.

$$B_n^{(m)} \leq pK \int_0^{t_o} (t^{p-1-\alpha/\omega'} + t^{p-1-\alpha/\omega})\, dt$$

$$+ p\mu_n(\{x \in E: d(x,F_m) \geq t_o\}).$$

Unter Beachtung von (iii) folgt hieraus $\lim_{m\to\infty} \overline{\lim_n} B_n^{(m)} = 0$, das heißt 3.8(v).

Der Beweis des Theorems ist somit erbracht.

3.12 Bemerkungen

(1) Während 3.8 für beliebige Γ-stabile Maße gültig ist, kann 3.11 wegen der Voraussetzung "$\alpha < p\omega_o^-$" nur für solche ohne Gauß-Komponente Anwendung finden (vgl. 2.1).

(2) Da jeder separable Banachraum vom Typ 1 ist, charakterisiert 3.11 den normalen Anziehungsbereich Γ-stabiler Maße mit Index $\alpha < \omega_o^-$.

(3) Wählen wir in 3.11 für Γ die Gruppe $(tI)_{t>0}$, so ergibt sich genau das von A. Araujo und E. Giné in [3] bewiesene Theorem 4.3.

4. Der normale Anziehungsbereich Γ-stabiler Gauß-Maße

Wir stellen nun die Gauß-Maße in den Vordergrund unserer Überlegungen. Wie wir in §3 schon bemerkten, hängt der normale Anziehungsbereich von Gauß-Maßen im allgemeinen von der Gruppe Γ ab. Daher ist es nicht möglich, unsere Untersuchungen auf die Gruppe $(tI)_{t>0}$ zu beschränken, bezüglich der ja jedes Gauß-Maß stabil ist.

Wir werden daher so vorgehen, daß wir zunächst notwendige und hinreichende Bedingungen aufzeigen. Anschließend beschäftigen wir uns mit solchen Gruppen Γ, die einen Übergang zu $(tI)_{t>0}$ erlauben.

Um Bedingung I.3.1(iii) vereinfachen zu können, beschränken wir uns auf Banachräume vom Typ p bzw. auf ihre Duale.

4.1 Satz

Es seien E ein Banachraum vom Typ p, $\mu = [x,R,0]$ ein Γ-stabiles Gauß-Maß mit Index α und $\nu \in \mathcal{M}^1(E)$.

Weiterhin erfülle ν die folgenden Bedingungen:

(i) Für jedes $B \in \mathcal{B}(L)$ gilt

$$\lim_{s\to\infty} s^{\alpha}\nu(\{T_t x: x \in B,\ t > s\}) = 0.$$

(ii) Für alle $\delta > 0$, $x' \in E'$ gilt

$$\langle Rx',x'\rangle = \lim_{n\to\infty} n\Big[\int_{U_\delta} \langle x',x\rangle^2\, T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(dx) - \Big(\int_{U_\delta} \langle x',x\rangle\, T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(dx)\Big)^2\Big].$$

(iii) Es existieren eine aufsteigende Folge $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ endlich-dimensionaler Teilräume F_k von E mit $\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k} = E$ und ein $\delta > 0$, so daß gilt

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n}}\, n\int_{U_\delta} d(x-\int_{U_\delta} x\, T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(dx), F_k)^p\, T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(dx) = 0.$$

Dann liegt ν im normalen Anziehungsbereich von μ.

Beweis: Wir verifizieren (i)-(iii) von I.3.1 für $P_{X_{n,1}} = T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)$ $(n\in\mathbb{N})$.

Die Gültigkeit von I.3.1(ii) ist offensichtlich.

Aus (i) und der im Beweis zu 3.10 angewandten Abschätzung folgt $\lim_{n\to\infty} n\cdot T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(\{x: \|x\| > \delta\}) = 0$ für jedes $\delta > 0$. Dies ist gerade I.3.1(i) (mit M = 0).

Nach I.2.2(5) ist mit E auch jeder Quotient nach einem abgeschlossenen Teilraum F vom Typ p. Da aber $d(\cdot,F)$ auf E/F die Quotientennorm induziert, kann aus (iii) schließlich I.3.1(iii) abgeleitet werden.

Damit folgt die Behauptung.

Über notwendige Bedingungen für $\nu \in N(\mu)$ gibt Theorem 6.7 in [2] Auskunft. Wir spezialisieren es auf Gauß-Maße und modifizieren (i) in der zu 4.1(i) analogen Weise.

4.2 Satz

Es seien E der Dual eines Banachraumes vom Typ 2 sowie $\mu = [x,R,0]$ ein Γ-stabiles Gauß-Maß mit Index α. Außerdem liege $\nu \in \mathcal{M}^1(E)$ im normalen Anziehungsbereich von μ.

Dann gilt:

(i) Für jedes $B \in \mathcal{B}(L)$ folgt

$$\lim_{s\to\infty} s^{\alpha}\nu(\{T_t x: x \in B,\ t > s\}) = 0.$$

(ii) Für alle $x' \in E'$ gilt

$$\langle Rx',x'\rangle = \lim_{\delta\downarrow 0} \overline{\lim_{n}}\ n\Big[\int_{U_\delta} \langle x',x\rangle^2\, T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(dx) - \Big(\int_{U_\delta} \langle x',x\rangle\, T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(dx)\Big)^2\Big].$$

Es kann "$\overline{\lim}$" durch "$\underline{\lim}$" ersetzt werden.

(iii) Seien $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge endlichdimensionaler Teilräume F_k von E mit $\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k} = E$ und $\varepsilon > 0$. Dann folgt

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} n\int_{U_\varepsilon} d\Big(x - \int_{U_\varepsilon} x\, T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(dx), F_k\Big)^2\, T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(dx) = 0.$$

(iv) Für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} n\int_{U_\varepsilon} \Big\|x - \int_{U_\varepsilon} x\, T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(dx)\Big\|^2\, T_{n^{-1/\alpha}}(\nu)(dx) < \infty.$$

4.3 Bemerkung

Für separable Hilberträume ergibt sich durch 4.2(i)-(iv) eine Charakterisierung des normalen Anziehungsbereichs Gaußscher Maße.

Wir lenken unser Augenmerk nun auf $(tI)_{t>0}$-stabile Gauß-Maße.

Der Index eines solchen Maßes μ ist nach 2.2 stets 2. Der normale Anziehungsbereich enthält alle Maße $\nu \in \mathcal{M}^1(E)$, zu denen es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E gibt, so daß gilt

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1/2} I(\nu^n) * \varepsilon_{x_n} = \mu .$$

Dies bedeutet, daß das symmetrisierte Maß $\nu^o := \nu * \bar{\nu}$ dem zentralen Grenzwertsatz genügt.

Mit der Frage nach der Gültigkeit dieses Grenzwertsatzes haben sich viele Autoren befaßt. Es seien hier nur die Namen J. Hoffmann-Jørgensen, N.C. Jain, M.B. Marcus und G. Pisier erwähnt.

Aus dieser Beziehung zum zentralen Grenzwertsatz ergibt sich

4.4 Satz

Seien $\mu = [0,R,0]$ ein $(tI)_{t>0}$-stabiles Gauß-Maß sowie $\nu \in \mathcal{M}^1(E)$.

Dann gilt:

(i) Es sei E vom Typ 2. Weiterhin existiere für ν das zweite Moment.

Besitzt dann ν denselben Kovarianz-Operator wie μ, so liegt ν im normalen Anziehungsbereich von μ.

(ii) Sei E vom Kotyp 2 und liege ν im normalen Anziehungsbereich von μ.

Dann existiert für ν das zweite Moment, und die Maße μ, ν besitzen denselben Kovarianz-Operator.

Beweis: (i) Sei $E(\nu) := \int x\, \nu(dx)$. Für das Maß $\nu * \varepsilon_{-E(\nu)}$ gilt dann der zentrale Grenzwertsatz ([12], Cor. 3.3). Also existiert ein Gauß-Maß $\rho = [0,S,0]$ mit

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/2} I(\nu^n * \varepsilon_{-nE(\nu)}) = \rho.$$

Um auf Zentrierungen verzichten zu können, betrachten wir die symmetrisierten Maße ν^o bzw. ρ^o. Für diese hat man

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/2} I((\nu^o)^n) = \rho^o.$$

ρ^o besitzt den Kovarianz-Operator 2S. Also folgt mit I.3.1(ii) für alle x' aus einer $\sigma(E',E)$-totalen Teilmenge F' von E'

$$\langle 2Sx',x'\rangle = \lim_{\delta\downarrow o} \overline{\lim_n}\; n \int_{U_\delta} \langle x',x\rangle^2\, n^{-1/2} I(\nu^o)(dx).$$

(Diese Gleichheit gilt auch für "$\overline{\lim_n}$" statt "$\overline{\lim_n}$".)
Weiter gilt für $x' \in F'$

$$\langle 2Sx',x'\rangle = \lim_{\delta\downarrow o} \overline{\lim_n} \int 1_{U_\delta}(n^{-1/2}x)\langle x',x\rangle^2\, \nu^o(dx).$$

Nach Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz ergibt sich

$$\langle 2Sx',x'\rangle = \int \langle x',x\rangle^2\, \nu^o(dx) = \langle 2Rx',x'\rangle \qquad (x' \in F').$$

Aus der Symmetrie der Operatoren R, S folgt $R|_{F'} = S|_{F'}$. Somit hat man $R = S$, also $\rho = \mu$.

Dies war zu zeigen.

(ii) Wir betrachten das symmetrisierte Maß ν°. Für dieses ergibt sich aus der Voraussetzung

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/2} I((\nu^{\circ})^n) = \mu * \mu.$$

Es genügt also dem zentralen Grenzwertsatz.

Nun war E vom Kotyp 2 vorausgesetzt. Deshalb folgt mit ([12], Theorem 5.2) die Existenz des zweiten Moments für ν°, also auch für ν.

Eine Wiederholung der in (i) ausgeführten Argumentation liefert, daß ν° den Kovarianz-Operator 2R, also ν den Kovarianz-Operator R besitzen muß.

4.5 Korollar

Es seien E ein separabler Hilbertraum, μ ein $(tI)_{t>0}$-stabiles Gauß-Maß sowie $\nu \in \mathcal{M}^1(E)$.

Das Maß ν liegt genau dann im normalen Anziehungsbereich von μ, wenn es endliches zweites Moment und denselben Kovarianz-Operator wie μ besitzt.

Abschließend widmen wir uns einer speziellen Klasse von Gruppen Γ.

Gegeben seien ein Γ-stabiles Gauß-Maß μ sowie ein Maß $\nu \in N(\mu)$. Da μ auch bezüglich der Gruppe $(tI)_{t>0}$ stabil ist, stellt sich folgende Frage: Unter welchen Voraussetzungen liegt ν auch im normalen Anziehungsbereich von μ bezüglich der Gruppe $(tI)_{t>0}$?

Eine Antwort liefert

4.6 Satz

Sei $\mu = [0,R,0]$ Γ-stabil mit Index α. Weiterhin sei die Gruppe $(t^{-1/2}T_{t^{1/\alpha}})_{t>0}$ relativ kompakt bezüglich der starken Operatortopologie auf E.

Dann stimmen die normalen Anziehungsbereiche von μ bezüglich Γ und $(tI)_{t>0}$ überein.

Beweis: μ ist sowohl Γ-stabil mit Index α als auch $(tI)_{t>0}$-stabil mit Index 2. Also gilt nach 1.2

$$\mu^t = T_{t^{1/\alpha}}(\mu) \quad \text{sowie} \quad \mu^t = t^{1/2}I(\mu) \qquad (t>0).$$

Damit folgt

$$\mu = t^{-1/2}T_{t^{1/\alpha}}(\mu) \qquad \text{für alle } t > 0. \quad (*)$$

Es liege nun $\nu \in \mathcal{M}^1(E)$ im normalen Anziehungsbereich von μ bezüglich Γ. Das heißt es existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E mit

$$\lim_{n\to\infty} T_{n^{-1/\alpha}}(\nu^n) * \varepsilon_{x_n} = \mu. \qquad (**)$$

Wir definieren nun für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\rho_n := n^{-1/2}I(\nu^n) * \varepsilon_{z_n} \quad , \text{ wobei } z_n := n^{-1/2}T_{n^{-1/\alpha}}x_n.$$

Wir zeigen die Konvergenz der Folge $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen μ. Dazu genügt es, zu zeigen, daß jede Teilfolge $(\rho_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen μ konvergente Teilfolge enthält.

Die Folge $(n_k^{-1/2}T_{n_k^{1/\alpha}})_{k\in\mathbb{N}}$ enthält nach Voraussetzung eine in der starken Operatortopologie konvergente Teilfolge $((n_k')^{-1/2}T_{(n_k')^{1/\alpha}})_{k\in\mathbb{N}}$. Bezeichne T deren Limes.

Aus (*) folgt $T(\mu) = \mu$.

Daher erhalten wir aus (**) unter Verwendung von Prop. 1.1 in [17]

$$\lim_{k\to\infty} (n_k')^{-1/2} T_{(n_k')^{1/\alpha}} \left[T_{(n_k')^{-1/\alpha}} (\nu^{n_k'}) * \varepsilon_{x_{n_k'}} \right] = T(\mu) = \mu.$$

Dies liefert aber $\lim_{k\to\infty} \rho_{n_k'} = \mu$.

Somit liegt ν im normalen Anziehungsbereich von μ bezüglich $(tI)_{t>0}$.

Der Beweis der Umkehrung verläuft auf analoge Weise. Wir führen ihn deshalb nicht aus.

4.7 Bemerkungen

(1) Die Aussagen von 4.4 bleiben richtig für ein Γ-stabiles Maß μ mit Index α, sofern die Gruppe $(t^{-1/2} T_{t^{1/\alpha}})_{t>0}$ bezüglich der starken Operatortopologie auf E relativ kompakt ist.

(2) Ist μ ein volles, $(t^A)_{t>0}$-stabiles Gauß-Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mit Index α, so kann 4.6 stets angewandt werden.
[Aus der Stabilität von μ bezüglich $(t^A)_{t>0}$ und $(tI)_{t>0}$ folgt $t^{A/\alpha-1/2}(\mu) = \mu$ für jedes $t > 0$. Da μ voll ist, ist die Gruppe $\{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d): T(\mu) = \mu\}$ kompakt und daher $(t^{A/\alpha-1/2})_{t>0}$ relativ kompakt.]

5. Momente

In diesem Paragraphen fragen wir nach der Existenz von Momenten von Maßen, die im normalen Anziehungsbereich Γ-stabiler Maße liegen.

Wir erinnern zunächst noch einmal an den endlich-dimensionalen Fall: Dort existieren die r-ten Momente für Maße im normalen Anziehungsbereich Γ-stabiler Poisson-Maße mit Index α für $r < \alpha(\max\{\mathrm{Re}\ \lambda: \lambda \in \sigma(A)\})^{-1}$. Sie existieren nicht für $r > \alpha(\min\{\mathrm{Re}\ \lambda: \lambda \in \sigma(A)\})^{-1}$. Im Falle Γ-stabiler Gauß-Maße bekommt man stets die Existenz des zweiten Moments für Maße in deren normalem Anziehungsbereich.

Für separable Banachräume werden wir sehr ähnliche Resultate beweisen können, zumindest für die Γ-stabilen Poisson-Maße.

Die oben auftretenden Spektralschranken $s^+(A)$ bzw. $s^-(A)$ werden dabei durch die Wachstumsschranken ω_o^+ bzw. ω_o^- ersetzt (vgl. I.4.1).

5.1 Satz

Es seien μ ein Γ-stabiles Maß mit Index α und $\nu \in N(\mu)$.

Dann existiert für ν das r-te Moment , sofern $r < \frac{\alpha}{\omega_o^+}$ gilt.

Beweis: Wir verwenden die im Beweis von 3.11 angewandten Methoden. Es genügt daher, die Endlichkeit des Integrals

$$I := \int_0^\infty t^{r-1}\nu(\{x: \|x\| > t\})\,dt \quad \text{zu zeigen.}$$

Dazu wählen wir $\omega' \in (0,\omega_o^-)$ und $\omega > \omega_o^+$ mit $r < \alpha\omega^{-1}$. Für festes $t_o > 0$ erhalten wir aus 3.10 folgende Abschätzung

$$I \leq K \int_{t_o}^{\infty} t^{r-1-\alpha/\omega'} \, dt + K \int_{t_o}^{\infty} t^{r-1-\alpha/\omega} \, dt.$$

Beide Integrale sind endlich nach Wahl der Parameter. Also folgt nun die Behauptung.

5.2 Bemerkungen

(1) Ist Γ zudem normstetig (mit Generator A), so existieren die r-ten Momente für $r < \alpha(\sup\{\mathrm{Re}\ \lambda : \lambda \in \sigma(A)\})^{-1}$.

Dies gilt insbesondere für volle, operator-stabile Maße. Der Generator kann dann durch einen Exponenten, α durch 1 ersetzt werden. Man erhält dadurch eine Verschärfung von Korollar 2 in [18].

(2) Die Aussage von 5.1 gilt ebenso für Γ-stabile Gauß-Maße μ. Wie wir in §4 zeigten, erhält man in diesem Fall sogar die Existenz des zweiten Moments für ν, falls E vom Kotyp 2 ist und der normale Anziehungsbereich nicht von Γ abhängt.

Abschließend beweisen wir zwei Aussagen über die Nicht-Existenz von Momenten. Dabei konzentrieren wir uns zunächst auf die Γ-stabilen Maße selbst.

5.3 Satz

Es sei μ ein Γ-stabiles Maß mit Index α und nicht-verschwindendem Lévy-Maß.

Dann existiert für $r > \frac{\alpha}{\omega_o^-}$ das r-te Moment von μ nicht.

Beweis: Sei $r > \alpha(\omega_o^-)^{-1}$. Wir wählen $\omega' \in (0,\omega_o^-)$ mit $r > \alpha(\omega')^{-1}$. Ferner sei $t_o > 1$ so gewählt, daß $[L;t_o] \subset U^c$ gilt. Unter Beachtung von (ii) und (vi) aus I.4.1 ergibt sich

$$\int_{U^c} \|x\|^r \, M(dx) \geq \int_L \int_{t_o}^{\infty} \|T_t x\|^r \, t^{-(\alpha+1)} \, dt \, \gamma(dx)$$

$$\geq \int_L \int_{t_o}^{\infty} \|T_{1/t}\|^{-r} \, t^{-(\alpha+1)} \, dt \, \gamma(dx)$$

$$\geq M_{\omega'}^{-1} \, \gamma(L) \int_{t_o}^{\infty} t^{r\omega'-\alpha-1} \, dt.$$

Nach Wahl von ω' ist dieses Integral unendlich. Damit existiert für μ das r-te Moment nicht.

Dasselbe Resultat beweisen wir nun für Maße aus dem normalen Anziehungsbereich, jedoch unter der Zusatzvoraussetzung, daß der Γ-Querschnitt (L,ϕ) abgeschlossen ist.

5.4 Satz

Es sei μ ein Γ-stabiles Maß mit Index α und mit nicht-verschwindendem Lévy-Maß M. Ferner sei (L,ϕ) ein abgeschlossener Γ-Querschnitt.

Liegt dann ν im normalen Anziehungsbereich von μ, so existiert für $r > \frac{\alpha}{\omega_o^-}$ das r-te Moment von ν nicht.

Beweis: Nach I.4.3 ist ϕ ein Homöomorphismus. Somit stimmt der Rand der Menge $[L;1]$ mit L überein. Also folgt mit 1.3 $M(\partial[L;1]) = 0$. Daher ergibt sich aus 3.3 für $r > 0$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\nu([L;s])}{\nu([L;rs])} = r^{\alpha}.$$

Aus dieser Konvergenz läßt sich folgendes ableiten:

$$\forall \varepsilon > 0, s > 1 \; \exists s_o \in \mathbb{R}_+ \; \forall n \in \mathbb{N}_o: \quad \frac{\nu([L;s^n s_o])}{\nu([L;s^{n+1} s_o])} = (1+\varepsilon_n)^{-1} s^{\alpha},$$

wobei $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_o$.

Hieraus folgt nun

$$\nu([L;s^{n+1}s_o]) = \Big[\prod_{k=o}^{n} (1+\varepsilon_k)\Big]\nu([L;s_o])s^{-\alpha(n+1)}$$

$$\geq (1-\varepsilon)^{n+1}\nu([L;s_o])s^{-\alpha(n+1)}. \qquad (*)$$

Kommen wir zur Behauptung: Zu $r > \alpha/\omega_o^-$ wählen wir $\omega' \in (0,\omega_o^-)$ mit $r > \alpha/\omega'$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ und $s > 1$ mit $s^{r\omega'-\alpha}(1-\varepsilon) > 1$ und $s^{\alpha} > 1+\varepsilon$ sei s_o gemäß $(*)$ festgelegt.

Dann erhalten wir

$$\int \|x\|^r \, \nu(dx) = \int_{[L;s_o]} \|x\|^r \, \nu(dx) + \int_{[L;s_o]^c} \|x\|^r \, \nu(dx)$$

$$\geq \sum_{n=o}^{\infty} \int_{\{T_t y:\, y \in L,\, s^n s_o < t \leq s^{n+1} s_o\}} \|x\|^r \, (dx)$$

$$\geq \sum_{n=o}^{\infty} \Big[\inf\{\|T_t y\|^r:\, y \in L,\, s^n s_o < t \leq s^{n+1} s_o\}$$

$$\cdot \nu(\{T_t y:\, y \in L,\, s^n s_o < t \leq s^{n+1} s_o\})\Big]$$

$$\geq \sum_{n=o}^{\infty} \Big[\inf\{\|T_{1/(ts^{n+1})}\|^{-r}:\, s^{-1} s_o < t \leq s_o\}\nu([L;s^{n+1}s_o])$$

$$\cdot \Big(\frac{\nu([L;s^n s_o])}{\nu([L;s^{n+1}s_o])} - 1\Big)\Big]$$

$$\geq \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\inf\{\|T_{1/t}\|^{-r}: s^{-1}s_o<t\leq s_o\}M_{\omega'}^{-1}s^{r\omega'(n+1)}(1-\varepsilon)^{n+1}$$

$$\cdot\nu([L;s_o])s^{-\alpha(n+1)}((1+\varepsilon)^{-1}s^{\alpha}-1)\Big]$$

$$= (s^{\alpha}(1+\varepsilon)^{-1}-1)M_{\omega'}^{-1}\nu([L;s_o])$$

$$\cdot\inf\{\|T_{1/t}\|^{-r}: s^{-1}s_o<t\leq s_o\}\sum_{n=0}^{\infty}(s^{r\omega'-\alpha}(1-\varepsilon))^{n+1}.$$

Diese Reihe divergiert nach Wahl von s, ω' und ε.

Die Behauptung ist somit gezeigt.

5.5 Korollar

Sei μ ein $(tI)_{t>o}$-stabiles Maß mit Index $\alpha \in (0,2)$.

Für $\nu \in N(\mu)$ existiert dann das r-te Moment nicht, falls $r > \alpha$ gilt.

5.6 Bemerkung

Die Aussagen von 1.3 und 3.2 gelten mutatis mutandis für jeden Γ-Querschnitt (Q,χ) mit Schranken q_1 und q_2. Daher ist die Behauptung in 5.4 schon dann richtig, falls ein abgeschlossener Querschnitt für Γ mit Schranken q_1, q_2 existiert.

Literaturverzeichnis

[1] A. Araujo, E. Giné — Type, cotype and Lévy measures in Banach Spaces. Ann. Probab. 6 (1978), 637-643

[2] A. Araujo, E. Giné — On Poisson measures, Gaussian measures and the central limit theorem in Banach Spaces. Advances in Probability and related topics 4 (1978)

[3] A. Araujo, E. Giné — On tails and domains of attraction of stable measures on Banach Spaces. TAMS 248 (1979), 105-119.

[4] A. Araujo, E. Giné — The central limit theorem for real and Banach valued random variables. Wiley New York 1980

[5] E. Hille, R.S. Phillips — Functional Analysis and Semi-Groups. Amer. Math. Soc., Providence (1957)

[6] W.N. Hudson, J.D. Mason — Operator-stable laws. J. Mult. Anal. 11 (1981), 434-447

[7] W.N. Hudson, J.D. Mason — Operator-stable distributions on $\mathbb{R}^2$ with multiple exponents. Ann. Probab. 9 (1981), 482-489

[8] W.N. Hudson, J.D. Mason — Exponents of operator-stable laws. In: Probability in Banach Spaces III, Proc. Medford 1980, Lecture Notes in Mathematics 860, Springer (1981), 291-298

[9] W.N. Hudson, J.D. Mason — Domains of normal attraction. Preprint

[10] W.N. Hudson, J.D. Mason — Operator-stable laws: multiple exponents and elliptical symmetry. Ann. Probab. 10 (1982), 602-612

[11] B.W. Gnedenko, A.N. Kolmogoroff — Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen. Berlin (1960), 2. Auflage

[12] N.C. Jain — Central limit theorem in a Banach Space. In: Probability in Banach Spaces, Oberwolfach 1975, Lecture Notes in Mathematics 526, Springer (1976), 113-130

[13] R. Jajte — V-decomposable measures on Hilbert Spaces
In: Probability Theory on Vector Spaces II, Proc. Błazejewko, Poland 1979, Lecture Notes in Mathematics 828, Springer (1980), 108-127

[14] Z.J. Jurek — On stability of probability measures in Euclidean Spaces
In: Probability Theory on Vector Spaces II, Proc. Błazejewko, Poland 1979, Lecture Notes in Mathematics 828, Springer (1980), 128-145

[15] Z.J. Jurek — Domains of normal attraction of operator-stable measures on Euclidean Spaces
Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. 28 (1980), 397-409

[16] Z.J. Jurek — Convergence of types, selfdecomposability and stability of measures on linear spaces
In: Probability in Banach Spaces III, Proc. Medford 1980, Lecture Notes in Mathematics 860, Springer (1981), 257-267

[17] Z.J. Jurek — Limit distributions and one-parameter groups of linear operators on Banach Spaces
Mathematisch Instituut Katholieke Universteit, Toernooiveld (1981), Netherlands

[18] Z.J. Jurek, J. Smalara — On integrability with respect to infinitely divisible measures
Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. 29 (1981), 179-185

[19] W. Krakowiak — Operator-stable measures on Banach Spaces
Coll. Math. 41 (1979), 313-326

[20] J. Kucharczak — On operator-stable probability measures
Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. 23 (1975), 571-576

[21] J. Kucharczak — Remarks on operator-stable measures
Coll. Math. 34 (1975), 109-119

[22] S. Kwapień — Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients
Studia Math. 44 (1972), 583-595

[23] B. Mincer, K. Urbanik — Completely stable measures on Hilbert Spaces, Coll. Math. 42 (1979), 301-307

[24] K.R. Parthasarathy — Probability Measures on Metric Spaces, Academic Press, New York 1967

[25] H.H. Schaefer — Topological Vector Spaces, Springer (1971)

[26] K. Schmidt — Stable probability measures on $\mathbb{R}^{\nu}$, Z. W-Theorie verw. Geb. 33 (1975), 19-31

[27] M. Sharpe — Operator-stable probability distributions on vector groups, TAMS 136 (1969), 51-65

[28] E. Siebert — Unveröffentlichtes Manuskript (1983)

[29] K. Urbanik — Lévy's probability measures on Banach Spaces, Studia Math. 63 (1978), 283-308

Lebenslauf

Am 24. September 1954 wurde ich, Eckhard Kehrer, als Sohn des Feinmechanikermeisters Erwin Kehrer und seiner Ehefrau Gretel, geb. Belke, in Tübingen geboren.

Nach der Volksschule besuchte ich von 1966 bis 1974 das Kepler-Gymnasium in Tübingen, an dem ich im Mai 1974 die Reifeprüfung ablegte.

Zum Wintersemester 1974/75 begann ich an der Universität Tübingen mit dem Studium der Mathematik. Im Oktober 1976 bestand ich dort die Diplom-Vorprüfung und im Oktober 1980 die Diplom-Prüfung in Mathematik.

Seit dem Sommersemester 1978 bin ich als wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Tübingen angestellt.

Meine Dissertation "Stabilität von Wahrscheinlichkeitsmaßen unter Operatorgruppen auf Banachräumen" fertigte ich in diesem Institut unter Anleitung von Herrn Prof. Dr. E. Siebert in der Zeit von Februar 1981 bis April 1983 an.

Meine akademischen Lehrer waren: in Mathematik die Herren Professoren S. Breitsprecher, H. Heyer, H.H. Schaefer, U. Schlotterbeck, A. Schönhage, E. Siebert, O. Tamaschke, in Physik M. Baumann, M. Dal Cin, F. Gönnenwein, W. Güttinger.